

Caractères semi-simples de $G_2(F)$, F corps local non archimédien

Laure Blasco et Corinne Blondel

19 janvier 2013

Résumé

On définit strates semi-simples, caractères semi-simples et types semi-simples de $G_2(F)$. A partir de certains de ces types, on construit des représentations supercuspidales de ce groupe.

Mathematics Subject Classification (2000): 22E50

Introduction

Grâce aux travaux de C. J. Bushnell et P. C. Kutzko, nous connaissons une description de nature arithmétique des représentations complexes irréductibles supercuspidales des groupes linéaires définis sur un corps local non archimédien F [5]. Plus récemment, S. Stevens a décrit de manière semblable les représentations complexes irréductibles supercuspidales des groupes classiques en supposant que la caractéristique résiduelle de F est différente de 2 [19]. Ces descriptions reposent sur la notion de *caractère simple* ou *semi-simple*, selon le groupe considéré, et s'effectuent principalement en trois étapes : la définition des caractères simples ou semi-simples et l'étude de leurs propriétés ; la construction de représentations irréductibles du normalisateur d'un caractère simple ou semi-simple contenant ce caractère ; la démonstration que toute représentation irréductible supercuspidale s'obtient par induction compacte (modulo le centre) à partir d'une des représentations précédentes.

L'intérêt de telles descriptions est au moins double. D'une part, elles sont établies par des arguments algébriques et se prêtent donc à des constructions dans le cadre plus large des représentations à coefficients dans un anneau où la caractéristique résiduelle de F est inversible. C'est ainsi que les caractères semi-simples des groupes linéaires ou classiques interviennent de manière cruciale dans la démonstration du deuxième théorème d'adjonction conçue par J.-F. Dat [7]. D'autre part, ces descriptions en parallèle sur différents groupes

offrent l'espoir d'obtenir une bonne notion de transfert de caractères semi-simples qui aiderait à décrire certaines fonctorialités.

Dans cet article, nous reprenons cette démarche afin de décrire les représentations complexes supercuspidales du groupe exceptionnel $G_2(F)$. Nous réalisons les deux premières étapes et obtenons une série particulière de représentations irréductibles de sous-groupes ouverts compacts, les *types semi-simples* de $G_2(F)$. Nous concluons par l'énoncé de conditions suffisantes portant sur les types semi-simples pour que leurs induites compactes à $G_2(F)$ soient des représentations supercuspidales (théorème 4.3). Nous espérons montrer, dans un article ultérieur, que toutes les représentations irréductibles supercuspidales de $G_2(F)$ sont bien de cette forme.

Notons que K.-C. Yu a déjà donné une construction générale de représentations supercuspidales des groupes réductifs p -adiques [21] dont Ju-Lee Kim a montré l'exhaustivité [9] par des arguments analytiques. L'ensemble nécessite que la caractéristique résiduelle p de F soit suffisamment grande. Ici, nous supposons simplement qu'elle est différente de 2 et 3.

Le groupe $G_2(F)$ est le groupe des automorphismes d'une F -algèbre d'octonions V munie de sa norme et s'identifie ainsi à un sous-groupe du groupe orthogonal déployé $SO_F(V)$. Il est aussi le groupe des points fixes de $\text{Spin}_F(V)$ sous l'action d'un groupe d'automorphismes d'ordre 6 dit groupe de triallité. L'action du groupe de triallité n'est pas définie sur $SO_F(V)$ mais peut l'être sur ses pro- p -sous-groupes. L'idée est alors de construire les caractères semi-simples de $G_2(F)$ à partir de ceux de $SO_F(V)$ à l'aide d'une correspondance de Glauberman pour le groupe de triallité (théorème 2.18), tout comme S. Stevens a construit les caractères semi-simples des groupes classiques à partir de ceux du groupe linéaire en utilisant l'automorphisme d'adjonction [18]. Dès cette étape, l'exclusion des caractéristiques résiduelles 2 et 3 s'impose.

La deuxième étape se déroule parallèlement à [19, §§3.2 à 4.1]. Les quotients réductifs intervenant sont tous des groupes classiques définis sur le corps résiduel et nous utilisons encore une fois les résultats de [19]. Notons tout de même que les calculs d'entrelacement exigent de nouvelles méthodes puisqu'il n'existe pas pour $G_2(F)$ une transformée de Cayley aux bonnes propriétés (remarque 2.11).

Ce schéma simple nécessite un grand nombre de préparatifs et détours que nous présentons maintenant avec plus de détails dans le plan de l'article.

La première partie définit et étudie les *strates semi-simples* $[\Lambda, n, 0, \beta]$ de $\mathfrak{g}_2(F)$, l'algèbre de Lie de $G_2(F)$. Ce sont les strates semi-simples de $\text{End}_F(V)$ dont la suite de réseaux Λ correspond à un point de l'immeuble de $G_2(F)$ et l'élément β appartient à $\mathfrak{g}_2(F)$. Ce dernier est semi-simple et une dérivation sur V donc son noyau V^0 est une sous-algèbre de composition de dimension paire (1.2, 1.3). On dispose alors d'une décomposition de V en somme directe de V^0 et de son orthogonal W et, lorsque V^0 est déployée de dimension 2, d'une polarisation complète de W , $W = W^+ \oplus W^-$. La décomposition de V ainsi obtenue est stable par β et scinde la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ (§1.2). Elle gouverne toute l'étude.

Bien évidemment, lorsque la strate est nulle, cette décomposition est triviale. Ce cas corres-

pond au niveau zéro déjà étudié par L. Morris [12] et est oublié, ou peu s'en faut, jusqu'au dernier paragraphe (§4.2). Supposons donc la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ non nulle. Sa "restriction à W ou W^+ " (ici confondus sous le nom W'), c'est-à-dire la strate $[\Lambda \cap W', n, 0, \beta_{W'}]$ où $\beta_{W'}$ est la restriction de β à W' , est une strate semi-simple de l'algèbre de Lie d'un sous-groupe \bar{L} de $G_2(F)$ stabilisant W' . Celui-ci est isomorphe à $SL(3, F)$ si V^0 est déployée de dimension 2, $SU(2, 1)(F)$ si V^0 est anisotrope de dimension 2 et $SO(W)$ si V^0 est de dimension 4. De plus, le centralisateur de β dans $G_2(F)$ s'identifie au centralisateur de $\beta_{W'}$ dans \bar{L} (§1.4). La classification des strates semi-simples de $\mathfrak{g}_2(F)$ consiste alors à étudier cette "application de restriction à W' ". Le point crucial est la construction de suites de réseaux de V correspondant à un point de l'immeuble de $G_2(F)$ dont les suites de réseaux de W' , correspondant à un point de l'immeuble de \bar{L} , sont facteurs directs (§1.6). Mais ici, le langage approprié est celui des *normes* : normes de volume nul dans le cas de $SL(3, F)$ [3], normes autoduales dans celui d'un groupe classique [4] et normes autoduales d'algèbre dans celui de $G_2(F)$ [8]. On obtient ainsi un plongement canonique de l'immeuble de \bar{L} dans celui de $G_2(F)$ (propositions 1.14, 1.15, 1.16). On conclut sur une classification complète des strates semi-simples de $\mathfrak{g}_2(F)$ et un procédé d'approximation de telles strates (§1.7).

Suit la construction des caractères semi-simples de $G_2(F)$ associés à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ qui ne s'achève qu'au paragraphe 3. Afin d'utiliser une correspondance de Glauberman, nous devons au préalable étudier l'action du groupe de trialité Γ sur les caractères de $SO(V)$ associé à cette strate (§2). Notons d'abord que, la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ de $G_2(F)$ étant une strate semi-simple autoduale de $SO(V)$ (§1.2), la définition des caractères semi-simples de $SO(V)$ doit être élargie comme dans [7]. A plusieurs reprises dans l'article, on étend les résultats de [19] à ces strates et leurs caractères semi-simples associés.

Ceci dit, l'action du groupe de trialité est complexe et son étude occupe tout le paragraphe 2. Une première raison est que l'action de Γ ne se reflète point sur l'espace V et il n'est plus clair que les filtrations de l'ordre $\mathfrak{A}(\Lambda)$ et du sous-groupe parahorique $P(\Lambda)$ soient stables sous cette action. Une deuxième raison est que la transformée de Cayley ne commute aux actions de Γ que "localement" : la description des caractères des quotients des filtrations des sous-groupes parahoriques à l'aide d'éléments de $\mathfrak{g}_2(F)$ n'est pas immédiate, ni le fait que les caractères obtenus à partir d'un élément de $\mathfrak{g}_2(F)$ soient fixes sous l'action de Γ . Ces propriétés sont établies aux paragraphes 2.2 et 2.3. Elles assurent que les sous-groupes $H^1(\beta, \Lambda)$ et $J^1(\beta, \Lambda)$ associés à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ sont stables sous l'action de Γ (lemme 2.17) et que le caractère ψ_β de $P^{[\frac{n}{2}]+1}(\Lambda)$ est fixe par trialité. Ceci est le premier pas vers une caractérisation des caractères semi-simples de $SO(V)$ associés à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ qui restent semi-simples sous l'action de Γ . Les pas suivants exigent, en outre, une étude de l'action de la trialité sur le centralisateur de β (§2.5). On démontre alors que les seuls caractères semi-simples de $SO(V)$ associés à $[\Lambda, n, 0, \beta]$ qui restent semi-simples sous l'action de Γ sont ceux qui sont fixes sous cette action (théorème 2.18). On les nomme *caractères semi-simples spéciaux de $SO(V)$ associés à $[\Lambda, n, 0, \beta]$* .

On est maintenant en mesure de définir les *caractères semi-simples de $G_2(F)$* associés à

$[\Lambda, n, 0, \beta]$ comme l'image par la correspondance de Glauberman pour le groupe Γ des caractères semi-simples spéciaux de $\mathrm{SO}(V)$ associés à cette même strate. Il s'agit simplement des restrictions à $\bar{H}^1(\beta, \Lambda) := H^1(\beta, \Lambda) \cap G_2(F)$ des caractères semi-simples spéciaux de $H^1(\beta, \Lambda)$.

Dans le paragraphe 3, on aborde la deuxième partie de la construction des types semi-simples dont le déroulement est parallèle au cas classique. Les caractères semi-simples de $G_2(F)$ associés à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ jouissent des mêmes propriétés que ceux de $\mathrm{SO}(V)$ et admettent une extension de Heisenberg $\bar{\eta}$ à $\bar{J}^1(\beta, \Lambda) := J^1(\beta, \Lambda) \cap G_2(F)$ (§3.1). A leur tour, les représentations de Heisenberg obtenues possèdent la propriété cruciale “d'entrelacement simple” : la dimension des espaces d'entrelacements est toujours égale à 0 ou 1. Pour l'établir, on traduit cette propriété en termes d'égalité entre certains sous-groupes de $\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ et de ses analogues dans $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{SO}(V)$ (proposition 3.6) ce qui permet de “descendre” les résultats de $\mathrm{GL}(V)$ à $G_2(F)$ en considérant les invariants sous l'action de l'adjonction puis sous celle du groupe de triality (§3.3).

Il ne reste plus qu'à terminer la construction en étendant la représentation $\bar{\eta}$ au groupe $\bar{J}(\beta, \Lambda) := \bar{P}_\beta(\Lambda)\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ où $\bar{P}_\beta(\Lambda) = P(\Lambda) \cap \bar{G}_\beta$. Ceci est réalisé au dernier paragraphe. Grâce aux propriétés obtenues sur $\bar{\eta}$ et sur l'immeuble de $G_2(F)$ (en particulier le lemme 1.21) et en ajoutant que le quotient $\bar{J}(\beta, \Lambda)/\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ est un groupe classique sur le corps résiduel, la même méthode que [19] conduit à la définition des types semi-simples de $G_2(F)$ (§4.2). On conclut en donnant des conditions suffisantes sur ces types semi-simples pour que leurs induites à $G_2(F)$ soient cuspidales (théorème 4.3).

Cette étude a démarré à la suite d'un groupe de travail sur G_2 en 2003/2005 dont nous remercions les participants, en particulier François Sauvageot qui réalisa à cette occasion une étude sur les tores qui, bien qu'invisible dans ce qui suit, en a inspiré le contenu. Nous espérons qu'une partie de la jubilation de ce groupe de travail et du plaisir que nous avons eu à mener à son terme la présente étude transparaît dans ce qui suit.

1 Strates semi-simples de $\mathfrak{g}_2(F)$

1.1 Définitions et notations relatives à G_2

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p différente de 2 et 3. Soit V l'algèbre des octonions sur F ; on notera 1 son unité, Q sa norme, qui est multiplicative : $Q(xy) = Q(x)Q(y)$ ($x, y \in V$), et f la forme bilinéaire associée, de sorte que $f(x, x) = 2Q(x)$ ($x \in V$). L'anti-automorphisme d'adjonction de $\mathfrak{g}_F(V)$ sera noté $X \mapsto \sigma(X)$ et l'automorphisme correspondant de $\mathrm{GL}_F(V)$ sera noté τ : $\tau(g) = \sigma(g)^{-1}$.

Les propriétés de l'algèbre d'octonions sont décrites par exemple dans [15], nous rappelons simplement ici les points essentiels pour fixer les notations. Le conjugué d'un octonion x est

$\bar{x} = f(x, 1)1 - x$, sa trace est $\text{tr } x = x + \bar{x}$, sa norme est telle que $Q(x)1 = x\bar{x} = \bar{x}x$, et l'on a pour $x, y, z \in V$: $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ et $f(xy, z) = f(y, \bar{x}z) = f(x, z\bar{y})$.

On considérera toujours $G_2(F)$, noté \bar{G} , comme le sous-groupe de $\text{GL}_F(V) = \tilde{G}$ formé des automorphismes d'algèbre de V . C'est aussi un sous-groupe du groupe $\text{SO}_F(V)$, noté G , formé des éléments de déterminant 1 du groupe $\text{O}_F(V) = \text{GL}_F(V)^\tau$ des isométries de la forme quadratique Q . On notera $\mathfrak{g}_2(F)$ l'algèbre de Lie de $G_2(F)$, sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{so}_F(V)$ et de $\mathfrak{gl}_F(V)$.

1.2 Définitions et notations relatives aux strates

Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$ une strate de $\text{End}_F(V)$ [6, §3.1]. Supposons $\beta \in \text{End}_F(V)$ semi-simple : le polynôme minimal de β est un produit $\prod_{i=0}^l \Psi_i$ de polynômes irréductibles sur F deux à deux premiers entre eux. Posons $V^i = \ker \Psi_i(\beta)$. Cela définit une décomposition de V en somme directe $V = \bigoplus_{i=0}^l V^i$, unique à l'ordre près, telle que $\beta = \sum_{i=0}^l \beta_i$ où β_i est la restriction de β à V^i .

Par définition [18, Definition 3.2], la strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ est *semi-simple* dans $\text{End}_F(V)$ si

- $\Lambda = \bigoplus_{i=0}^l \Lambda^i$ où $\Lambda^i(t) = \Lambda(t) \cap V^i$ ($t \in \mathbb{Z}$) ;
- pour $0 \leq i \leq l$ la strate $[\Lambda^i, n_i, r, \beta_i]$ est simple ou nulle, avec $n_i = r$ si $\beta_i = 0$, $n_i = -v_{\Lambda^i}(\beta_i)$ sinon ;
- pour $0 \leq i, j \leq l$, $i \neq j$, la strate $[\Lambda^i \oplus \Lambda^j, \max\{n_i, n_j\}, r, \beta_i + \beta_j]$ n'est pas équivalente à une strate simple ou nulle.

On dit qu'une strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ est une strate de $\mathfrak{so}_F(V)$, ou *strate autoduale*, si la suite de réseaux Λ correspond à un point rationnel de l'immeuble de $\text{SO}_F(V)$ (voir [2] et §1.6) et si β appartient à $\mathfrak{so}_F(V)$. Soit alors $[\Lambda, n, r, \beta]$ une *strate semi-simple autoduale*. Le polynôme minimal de β est alors pair et, quitte à renuméroter, on peut répartir les polynômes irréductibles Ψ_i en deux sous-ensembles vérifiant :

- pour $0 \leq i \leq s$ le polynôme Ψ_i est pair.
- pour $1 \leq j \leq k$ on a l'égalité $\Psi_{s+2j-1}(-X) = \Psi_{s+2j}(X)$.

Chaque sous-espace V^i pour $i \leq s$ est non dégénéré et orthogonal à tous les autres. Pour $1 \leq j \leq k$ les sous-espaces V^{s+2j-1} et V^{s+2j} sont totalement isotropes en dualité et orthogonaux aux autres, ce qui nous donne la décomposition

$$V = [\perp_{i=0}^s V^i] \perp [\perp_{j=1}^k (V^{s+2j-1} \oplus V^{s+2j})]. \quad (1.1)$$

Rappelons comme en [7, §8.2] que cette définition est plus large que celle de strate semi-simple gauche dans [19], qui correspond à $k = 0$ dans la somme précédente.

On dit enfin qu'une telle strate est une *strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$* si Λ correspond à un point rationnel de l'immeuble de $G_2(F)$ (voir [8] et §1.6) et si β appartient à $\mathfrak{g}_2(F)$. Dans toute la suite ces conditions sont supposées vérifiées.

Soit donc β un élément semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$. Alors β est une dérivation de V , donc s'annule en 1. Notons V^0 l'espace propre associé à la valeur propre 0 de β ; il contient 1 et tous les produits de deux de ses éléments :

$$\forall x, y \in V^0, \quad \beta(xy) = \beta(x)y + x\beta(y) = 0.$$

De plus, puisque β est aussi un élément semi-simple de $\mathfrak{so}_F(V)$, le sous-espace V^0 est non isotrope et de dimension paire. C'est donc une sous-algèbre de composition de dimension paire de V .

1.3 Sous-algèbres de composition

Un bref rappel sur les sous-algèbres de composition de V s'impose ici ; les faits cités se trouvent soit dans la référence de base [15, Ch. 1 et 2], soit dans [14, §1] ou [8, §8]. Commençons par le procédé de doublement, qui est fondamental et fournit une règle de calcul largement utilisée dans tout ce paragraphe 1.

Proposition 1.2. [15, Proposition 1.5.1] *Soit C une algèbre de composition et D une sous-algèbre de composition de C , propre et de dimension finie. Alors pour tout $a \in D^\perp$ de norme non nulle la somme $D \perp Da$ est une sous-algèbre de composition de C dans laquelle le produit est donné par :*

$$(x + ya)(u + va) = (xu - Q(a)\bar{v}y) + (vx + y\bar{u})a \quad (x, y, u, v \in D).$$

On remarque sur cette formule que la multiplication à gauche (resp. à droite) par D sur Da vérifie $u(vx) = (uv)x$ (resp. $(xu)v = x(uv)$) pour tous $x \in Da$ et $u, v \in D$ si et seulement si D est commutative, auquel cas Da est un bimodule sur D .

Une sous-algèbre de composition D de V distincte du centre $F1$ de V et de V elle-même est de dimension 2 ou 4 ; sa description dépend de la restriction de Q à D .

- (i) Si D est de dimension 2 et contient des vecteurs isotropes pour Q , elle peut s'écrire sous la forme $D = F1 \oplus Fa$ pour un élément a vérifiant $Q(a) = -1$ et $f(a, 1) = 0$. Alors $e_D^+ = \frac{1}{2}(1 + a)$ et $e_D^- = \frac{1}{2}(1 - a)$ forment la seule paire d'idempotents de D vérifiant $e_D^+e_D^- = 0$. On a $Q(e_D^+) = Q(e_D^-) = 0$, $\overline{e_D^+} = e_D^-$, $e_D^+ + e_D^- = 1$ et $f(e_D^+, e_D^-) = 1$. Soit $W = D^\perp$. Les sous-espaces $W_D^+ = e_D^+W$ et $W_D^- = e_D^-W$ forment une polarisation complète de W . On a $W_D^+ = \{x \in V | e_D^+ \cdot x = x \text{ et } x \cdot e_D^+ = 0\}$.

Le groupe $SL_F(W_D^+) \simeq SL(3, F)$ s'injecte naturellement dans \bar{G} (l'action sur W_D^- étant donnée par dualité et l'action sur D triviale); son image est le fixateur (point par point) de D dans \bar{G} .

Notation 1.3. Une telle sous-algèbre D étant fixée, on note $\phi \mapsto \check{\phi}$ l'injection naturelle de $\mathfrak{sl}(W_D^+) \simeq \mathfrak{sl}(3, F)$ dans $\mathfrak{g}_2(F)$; $\check{\phi}$ agit par 0 sur D et par l'opposé du transposé de ϕ sur W_D^- .

- (ii) Si D est anisotrope de dimension 2, c'est une extension quadratique de F de la forme $D = F1 \oplus Fa$, pour un élément a orthogonal à 1 tel que $-Q(a)$ n'est pas un carré. Alors D^\perp est un D -espace vectoriel de dimension 3 que Q munit d'une structure hermitienne sur D . Le groupe $SU(D^\perp) \simeq SU(2, 1)(D/F)$ s'injecte naturellement dans \bar{G} (via l'action triviale sur D) ; son image est le fixateur de D dans \bar{G} .

Notation 1.4. Une telle sous-algèbre D étant fixée, on note $\phi \mapsto \vec{\phi}$ l'injection naturelle de $\mathfrak{su}(D^\perp) \simeq \mathfrak{su}(2, 1)(D/F)$ dans $\mathfrak{g}_2(F)$; $\vec{\phi}$ agit par 0 sur D .

- (iii) Si D est de dimension 4, D est une algèbre de quaternions. Si elle contient des éléments isotropes, elle est isomorphe à l'algèbre des matrices 2×2 à coefficients dans F et la restriction de Q à D coïncide avec le déterminant. Sinon, D est un corps de quaternions et la restriction de Q à D coïncide avec sa norme.

Dans les deux cas, notons D^1 le groupe des éléments de norme 1 de D . D'après [13, 57.13] toute rotation de D fixant 1 est de la forme $x \mapsto cxc^{-1}$ pour un $c \in D^\times$, de sorte que le groupe $SO_F(D)$ des automorphismes spéciaux orthogonaux de D est formé des applications $x \mapsto h(x) = pcxc^{-1}$ ($x \in D$) avec $c \in D^\times$ et $p = h(1) \in D^1$.

Pour tout choix de $a \in D^\perp$ de norme $Q(a)$ non nulle, V est somme orthogonale de D et Da . Un élément g du stabilisateur \bar{G}_D de D dans \bar{G} est décrit par deux éléments de D , c de norme non nulle et p de norme 1, de la façon suivante [15, (2.2)] :

$$\forall x, y \in D, \quad g(x + ya) = cxc^{-1} + (pcyc^{-1})a.$$

Puisque la multiplication à droite par a définit une similitude de rapport $Q(a)$ du F -espace vectoriel D dans le F -espace vectoriel Da qui induit un isomorphisme de $SO_F(D)$ dans $SO_F(Da)$, on conclut que la restriction au sous-espace W identifie \bar{G}_D au groupe $SO_F(D^\perp)$.

Il est bien connu que les deux classes de conjugaison de sous-groupes de Levi maximaux de G consistent en des sous-groupes $GL(2, F)$ associés à des racines courtes pour l'une, longues pour l'autre. On peut les identifier en termes de l'étude qui précède. Soit en effet D une sous-algèbre de composition déployée de dimension 4 de V . Toute polarisation complète de D^\perp , soit $D^\perp = W \oplus W'$, donne lieu à une injection naturelle de $GL_F(W)$ dans $SO_F(D^\perp)$ donc dans \bar{G}_D . Il n'est pas difficile de voir, par exemple en examinant les preuves des propositions 1.14 et 1.16, que l'on obtient ainsi la famille des "GL(2) courts" si le produit $W.W$ est nul, celle des "GL(2) longs" si le produit $W.W$ est non nul. Lorsque $W.W$ est non

nul, l'orthogonal de $WW \oplus W'W'$ dans D est une sous-algèbre de composition déployée X de dimension 2 de V et $\mathrm{GL}_F(W)$ est un sous-groupe de Levi de $\mathrm{SL}_F(W_X^+)$.

Pour terminer ce paragraphe, donnons une construction élémentaire dont nous aurons besoin à plusieurs reprises.

Lemme 1.5. *Soient L et L' deux droites isotropes de V , orthogonales à 1, de générateurs h et h' vérifiant $f(h, h') = 1$. Les éléments $h - h'$ et $h + h'$ sont de norme -1 et 1 respectivement et on a :*

$$(h + h')(h - h') = (h + h')(h - h')^{-1} = h'h - hh' \\ \text{avec } -h'h - hh' = 1, (-h'h)^2 = -h'h, (-hh')^2 = -hh'.$$

Ces éléments ne dépendent pas du choix des générateurs h et h' , on notera donc

$$e^+(L, L') = -hh', \quad e^-(L, L') = -h'h, \quad c(L, L') = (h + h')(h - h') = e^+(L, L') - e^-(L, L').$$

On a $c(L, L')h = h, c(L, L')h' = -h'$. Le sous-espace $F[c(L, L')]$ est une sous-algèbre de composition de dimension 2 de V dont la paire d'idempotents standard est $(e^+(L, L'), e^-(L, L'))$. Il est orthogonal à $L \oplus L'$ et leur somme est une sous-algèbre de composition de dimension 4 de V .

Démonstration. Il s'agit de calculs standard dans l'algèbre V , utilisant les formules de [15, §1]. De fait $h^2 = h'^2 = 0, hh' + h'h + f(h, h')1 = 0$ et $(h'h)(hh') = h'(h^2h') = 0$. ■

1.4 Les éléments semi-simples de $\mathfrak{g}_2(F)$

Soit β un élément semi-simple non nul de $\mathfrak{g}_2(F)$ et V^0 son noyau, sous-algèbre de composition de dimension 2 ou 4 de V . On note W l'orthogonal de V^0 ; il est stable par multiplication à droite et à gauche par V^0 , et lorsque V^0 est commutative c'est un bimodule sur V^0 . La décomposition $V = V^0 \perp W$ est stable par β et la restriction de β à W induit un endomorphisme de W noté β_W . La dérivation β commute aux multiplications à droite et à gauche par V^0 ; en particulier, si V^0 est de dimension 2 elle est V^0 -linéaire :

$$\forall w \in W, v, v' \in V^0, \quad f(v'w, v) = f(w, \bar{v}'v) = 0 \text{ et } f(wv', v) = f(w, v\bar{v}') = 0, \\ \beta(vw) = v\beta(w) \text{ et } \beta(wv) = \beta(w)v.$$

Notons \tilde{G}_β le centralisateur de β dans $\mathrm{GL}_F(V)$ puis G_β, G'_β et \bar{G}_β ses centralisateurs dans $\mathrm{O}_F(V), \mathrm{O}'_F(V)$ et $\mathrm{G}_2(F)$ respectivement.

Lemme 1.6. *On suppose que V^0 est de dimension 2.*

- (i) *Si V^0 est un plan hyperbolique, les sous-espaces $W^\pm = W_{V^0}^\pm$ sont stables par β . La restriction β_{W^+} de β à W^+ est un élément de $\mathfrak{sl}(W^+) \simeq \mathfrak{sl}(3, F)$ et \bar{G}_β est le centralisateur de β_{W^+} dans $\mathrm{SL}_F(W^+) \simeq \mathrm{SL}(3, F)$.*

- (ii) Si V^0 est une extension quadratique F' de F , la restriction β_W appartient à l'algèbre de Lie de $SU(W)$, isomorphe à $\mathfrak{su}(2, 1)(F'/F)$, et \bar{G}_β est le centralisateur de β_W dans $SU(W) \simeq SU(2, 1)(F'/F)$.

Démonstration. Dans le cas (i), les sous-espaces W^\pm sont stables par β qui est V^0 -linéaire, et β_{W^+} est un élément de $\mathfrak{sl}(W^+)$. Tout élément g de \bar{G}_β stabilise V^0 et W . La restriction de g à V^0 est un automorphisme d'algèbre donc g fixe $e_{V^0}^+$ et $e_{V^0}^-$ ou les échange. Mais dans le deuxième cas, g échangerait les sous-espaces vectoriels W^+ et W^- ce qui entraînerait que β_{W^+} et son opposé soient conjugués, ce qui est impossible en dimension impaire.

Par suite, tout élément de \bar{G}_β est l'identité sur V^0 et stabilise W^+ et W^- . L'application de restriction à W^+ définit un plongement de \bar{G}_β dans $SL_F(W^+)$ dont l'image est le centralisateur de β_{W^+} .

Dans le cas (ii), l'élément β_W appartient à $\mathfrak{su}(2, 1)(F'/F)$ et le sous-groupe des automorphismes de V triviaux sur V^0 est isomorphe à $SU(2, 1)(F'/F)$ via l'application de restriction à W (§1.3). Pour finir la démonstration, il suffit de montrer que tout élément de \bar{G}_β est trivial sur V^0 .

Pour cela, on considère la F' -algèbre $V' = F' \otimes_F V$ dont le groupe d'automorphismes \bar{G}' est $G_2(F')$. L'élément $\beta' = 1 \otimes \beta$ appartient à $\text{Lie } \bar{G}'$ et son noyau est $V'^0 = F' \otimes_F V^0$ qui est maintenant une sous-algèbre déployée de dimension 2. Par (i), tous les éléments de $\bar{G}'_{\beta'}$ sont triviaux sur V'^0 donc en particulier, tous les éléments de $1 \otimes \bar{G}_\beta$. On en déduit que tout élément de \bar{G}_β est trivial sur V^0 . ■

Lemme 1.7. *On suppose que V^0 est de dimension 4. Alors β_W est un endomorphisme de W dont le polynôme minimal est de la forme $X^2 - u$, $u \in F^\times$.*

- (i) *Si le polynôme minimal de β_W est scindé, il possède deux racines opposées λ et $-\lambda$. Les deux sous-espaces propres de β_W , notés W_λ et $W_{-\lambda}$, définissent une polarisation complète de W . Le groupe \bar{G}_β s'identifie par la restriction à W_λ à $GL(W_\lambda) \simeq GL(2, F)$. Il est en fait un sous-groupe de Levi de \bar{G} attaché à une racine courte. Dans ce cas, l'algèbre V^0 est nécessairement déployée.*
- (ii) *Si le polynôme minimal de β_W est irréductible, β_W engendre une extension quadratique $F[\beta_W]$ de F et W est un $F[\beta_W]$ -espace vectoriel muni de la forme hermitienne Φ_W vérifiant : $\text{tr}_{F[\beta_W]/F} \circ \Phi_W = f_{|W \times W}$. Ainsi, β_W est un élément scalaire de $\mathfrak{u}(\Phi_W, W)$. Le centralisateur \bar{G}_β de β s'identifie par restriction à W au groupe $U(\Phi_W, W)$, groupe unitaire anisotrope ou quasi-déployé selon que V^0 est anisotrope ou déployée.*

Démonstration. Soit a un élément de norme non nulle dans l'orthogonal de V^0 . D'après la démonstration du lemme 2.4.3 de [15], il existe un élément c de V^0 , de carré non nul et de trace nulle tel que : $\beta(v + v'a) = v'(ca) = (cv')a$ pour tous $v, v' \in V^0$. Il s'ensuit que β_W

n'est pas scalaire et β_W^2 est la multiplication par c^2 , non nul puisque β est semi-simple non nul. Le polynôme minimal de β_W est donc de la forme indiquée.

Le centralisateur \bar{G}_β de β s'identifie, via la restriction à W , au sous-groupe des éléments de $SO_F(W)$ qui commutent à β_W (1.3(iii)).

Dans le cas (ii), \bar{G}_β s'identifie donc au groupe des automorphismes $F[\beta_W]$ -linéaires de W qui conservent la forme hermitienne Φ_W , c'est-à-dire à $U(\Phi_W, W)$.

Dans le cas (i), β_W est diagonalisable de valeurs propres λ et $-\lambda$, chacune de multiplicité 2 puisque β_W est de trace nulle. Si $e_{F[c]}^+$ et $e_{F[c]}^-$ sont les idempotents orthogonaux de $F[c]$ (§1.3), les sous-espaces propres de β_W sont $W_\lambda = (e_{F[c]}^+ V^0)a$ et $W_{-\lambda} = (e_{F[c]}^- V^0)a$ et forment une polarisation complète de W . Le groupe \bar{G}_β s'identifie alors à $GL(W_\lambda) \simeq GL(2, F)$ par la restriction à W_λ . Pour voir qu'il s'agit d'un Levi attaché à une racine courte on peut s'appuyer sur le paragraphe 1.3 et remarquer soit que $W_\lambda W_\lambda$ est nul, car 2λ n'est pas valeur propre de β , soit que W_λ et $W_{-\lambda}$ se décomposent non trivialement en somme directe de leurs intersections avec $W_{F[c]}^+$ et $W_{F[c]}^+$.

On peut aussi identifier \bar{G}_β au centralisateur du tore de rang 1 de $GL(W_\lambda)$ formé des automorphismes scalaires. Ce dernier est l'image par la restriction à W_λ d'un tore \bar{T} de rang 1 de \bar{G} contenu dans \bar{G}_β dont les éléments agissent trivialement sur V^0 et dont le centralisateur est précisément \bar{G}_β . A conjugaison près dans \bar{G} (par un élément de \bar{G} envoyant c sur un multiple de X_0 dans les notations de [14], voir *loc. cit.* Theorem 1) on reconnaît le tore standard de \bar{G} dont le centralisateur est facteur de Levi d'un sous-groupe parabolique maximal de \bar{G} attaché à une racine courte [14, §1.4]. ■

Remarque.

Reprenons les notations du lemme 1.6 et considérons le cas où β_{W^+} (i) ou β_W (ii) est non nul mais a une valeur propre nulle. Alors le sous-espace propre correspondant est forcément de dimension 1 (sur F pour le cas (i), sur F' pour le cas (ii)) et l'on obtient dans les deux cas un sous-espace W_0 de W , de dimension 2 sur F , sur lequel β_W est nul. Ce sous-espace est non dégénéré et orthogonal à V^0 : par le procédé de doublement, $V^0 \perp W_0$ est une sous-algèbre de composition. Les cas étudiés dans le lemme 1.7 peuvent ainsi être considérés comme des cas limites de ceux du lemme 1.6, on y reviendra plus loin. On notera toutefois la différence importante dans l'étude du centralisateur.

1.5 Propriétés des éléments semi-simples de $\mathfrak{g}_2(F)$

De temps à autre dans ce travail, on a besoin d'un argument au cas par cas ; après tout G_2 est un groupe exceptionnel. Nous avons choisi de réunir dans ce paragraphe des propriétés très précises dont l'utilité apparaîtra plus loin. On garde les notations du paragraphe précédent.

Lemme 1.8. *Supposons V^0 anisotrope de dimension 2. Le centralisateur de β dans $O_F(V)$ est contenu dans $O_F(V^0) \times U(W, V^0/F)$.*

Démonstration. Le centralisateur de β dans $O_F(V)$ est produit de $O_F(V^0)$ par le centralisateur de β_W dans $O_F(W)$: il s'agit de vérifier que l'algèbre $F[\beta_W]$ contient V^0 . Le fait que β_W , élément semi-simple de $\mathfrak{su}(W, V^0/F)$, soit injectif et de trace nulle sur V^0 intervient de façon essentielle. Soit P_{V^0} le polynôme minimal de β_W sur V^0 .

Si P_{V^0} est irréductible, β_W engendre une extension de V^0 de degré 3 (le degré 1 est impossible car β_W est de trace nulle sur V^0 et $p \neq 3$), soit $[V^0[\beta_W] : F] = 6$. Son polynôme minimal sur F est multiple de P_{V^0} et de degré pair car l'involution adjointe agit non trivialement sur $F[\beta_W]$. Il est donc de degré 6 et $V^0[\beta_W] = F[\beta_W]$.

Si P_{V^0} est produit de trois facteurs de degré 1, de racines $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in V^0$, il faut voir que $\beta_i \notin F$. Si un vecteur propre correspondant à β_i est anisotrope, c'est le cas car $\sigma(\beta_i) = -\beta_i$. Sinon les droites propres de β_1 et β_2 (par exemple) sont isotropes en dualité et on ne peut avoir $\beta_1 \in F$ sinon $\beta_2 = -\beta_1$ et par trace $\beta_3 = 0$. C'est la même chose si P_{V^0} est produit de deux facteurs de degré 1.

Si P_{V^0} a un facteur irréductible Q de degré 2 et une racine $\beta_1 \in V^0$, la droite propre pour β_1 est anisotrope et $\beta_1 \notin F$. Soit β_2 la restriction de β_W au noyau de $Q(\beta_W)$. Son polynôme minimal sur F est multiple de Q mais ne peut être égal à Q car $\text{tr}_{V^0} \beta_2 = -\beta_1 \notin F$, on a donc $F[\beta_2] = V^0[\beta_2]$. ■

Lemme 1.9. *Supposons V^0 déployée de dimension 2. Soit $W = W^+ \oplus W^-$ la polarisation complète canonique de W et soit ι l'injection correspondante de $\text{GL}_F(W^+)$ dans $\text{SO}_F(W)$. Le centralisateur de β dans $\text{SO}_F(V)$ est contenu dans $\text{SO}_F(V^0) \times \iota(\text{GL}_F(W^+))$.*

Démonstration. Le centralisateur de β dans $O_F(V)$ est produit de $O_F(V^0)$ et du centralisateur de β_W dans $O_F(W)$. Un élément du centralisateur de β_W stabilise les sous-espaces propres de β_W , il suffit donc de vérifier que chacun d'entre eux est entièrement contenu soit dans W^+ soit dans W^- , ou encore que les polynômes minimaux P^+ et P^- de β_{W^+} et β_{W^-} , restrictions de β à W^+ et W^- respectivement, sont premiers entre eux. Là encore, le fait que β_{W^+} soit injectif et de trace nulle est essentiel. Comme $\beta_{W^-} = -{}^t\beta_{W^+}$ on a $P^-(X) = \pm P^+(-X)$.

Si P^+ est irréductible il est de degré 3, car la trace d'un scalaire non nul est non nulle ($p \neq 3$), et $P^-(X) = -P^+(-X)$ est irréductible et distinct de P^+ (les traces de β_{W^-} et β_{W^+} sont opposées), ils sont donc premiers entre eux.

Si P^+ a deux ou trois facteurs irréductibles de degré 1, de racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, les racines de P^- sont les opposées des précédentes et on ne peut avoir d'égalité $\lambda_i = -\lambda_j$ car les λ_i sont non nuls et de somme nulle.

Enfin, si $P^+(X) = (X - \lambda)Q(X)$ avec $\lambda \in F$ et Q irréductible de degré 2, on a $P^-(X) = (X + \lambda)Q(-X)$. Il est premier à P^+ car λ est non nul et le coefficient de X dans Q est λ . ■

Lemme 1.10. *Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$, $0 \leq r < n$, une strate semi-simple non nulle de $\mathfrak{g}_2(F)$. Dans les cas suivants :*

- V^0 est de dimension 4 ;
- V^0 est anisotrope de dimension 2 et β_W engendre une extension cubique de V^0 ;
- V^0 est déployée de dimension 2 et β_{W+} engendre une extension cubique de F ;

la strate $[\Lambda, n, n-1, \beta]$ est semi-simple également.

Démonstration. Si V^0 est de dimension 4, nous reprenons les notations du lemme 1.7. Si u est un carré, alors $-n$ est la valuation de λ et les polynômes caractéristiques des strates simples $[\Lambda \cap W_\lambda, n, n-1, \lambda]$ et $[\Lambda \cap W_{-\lambda}, n, n-1, -\lambda]$ sont premiers entre eux. Si u n'est pas un carré, β_W est un élément de trace nulle dans l'extension quadratique de F qu'il engendre, il est donc *minimal* sur F au sens de [5, (1.4.14)] et la strate $[\Lambda \cap W, n, n-1, \beta_W]$ est simple par [5, (1.4.15)].

Supposons V^0 de dimension 2. Une extension cubique E de F est ou bien totalement ramifiée ou bien non ramifiée et on vérifie immédiatement que dans les deux cas, pour $p \neq 3$, les éléments de trace nulle de E sont minimaux sur F . Si V^0 est anisotrope, β_W est minimal sur V^0 , la strate $[\Lambda_W, n, n-1, \beta_W]$ est donc simple sur V^0 et a fortiori sur F . Si V^0 est déployée, β_{W+} est minimal sur F et la strate $[\Lambda_{W+}, n, n-1, \beta_{W+}]$ est simple. Par un raisonnement semblable à celui du lemme précédent on constate que le polynôme caractéristique de cette strate est premier à celui de $[\Lambda_{W-}, n, n-1, \beta_{W-}]$, leur somme est donc semi-simple. ■

1.6 Normes d'algèbre autoduales

Un point rationnel de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_F(V)$ peut être vu sous différents aspects : comme une suite de réseaux de V , comme une fonction de réseaux de V à points de discontinuité rationnels, ou comme une *norme* à valeurs rationnelles sur V . Les définitions et le passage d'un langage à un autre sont détaillés dans [1, I]. De même, un point rationnel de l'immeuble de $\mathrm{SO}_F(V)$ peut être vu comme une suite de réseaux autoduale de V , comme une fonction de réseaux autoduale de V à points de discontinuité rationnels, ou comme une *norme autoduale* à valeurs rationnelles sur V : voir [2, §3]. Considérant l'immeuble de $\mathrm{G}_2(F)$ comme sous-ensemble simplicial de celui de $\mathrm{SO}_F(V)$, le langage le plus adapté est celui des normes : les points rationnels de l'immeuble de $\mathrm{G}_2(F)$ sont alors les *normes d'algèbre autoduales* de V [8, Proposition 4.2]. Pour établir dans la suite les propriétés dont nous avons besoin, nous passons constamment d'un langage à l'autre.

Rappelons maintenant les définitions essentielles. Une *norme* (ou F -norme) rationnelle sur V est une application α de V dans $\mathbb{Q} \cup \infty$ vérifiant pour tous x, y dans V et ξ dans F :

$$\alpha(x+y) \geq \inf(\alpha(x), \alpha(y)); \quad \alpha(\xi x) = v_F(\xi) + \alpha(x); \quad \alpha(x) = \infty \iff x = 0.$$

Si V est muni d'une forme quadratique ou hermitienne non dégénérée f , la *norme duale* d'une norme α sur V est la norme α^* sur V définie par

$$\alpha^*(v) = \inf_{x \in V} (v_F(f(v, x)) - \alpha(x)) \quad (v \in V).$$

La norme α est dite *autoduale* si $\alpha = \alpha^*$. Enfin, c'est une *norme d'algèbre* si elle vérifie

$$\alpha(xy) \geq \alpha(x) + \alpha(y) \quad \text{pour tous } x, y \in V.$$

Une norme d'algèbre autoduale de l'algèbre d'octonions V vérifie toujours $\alpha(1) = 0$ et $\alpha(\bar{x}) = \alpha(x)$ ($x \in V$) [8, Corollary 7.5].

Soit α une norme rationnelle sur V . La fonction de réseaux correspondante est la fonction λ_α définie par $\lambda_\alpha(r) = \{v \in V / \alpha(v) \geq r\}$ ($r \in \mathbb{R}$). Inversement la norme associée à une fonction de réseaux λ est $v \mapsto \alpha_\lambda(v) = \sup\{r \in \mathbb{R} / v \in \lambda(r)\}$ ($v \in V$). Si f est une forme sur V comme ci-dessus, on définit le dual d'un réseau L de V par $L^* = \{x \in V / f(x, L) \subset \mathfrak{p}_F\}$, et la fonction duale d'une fonction de réseaux λ de V par

$$\lambda^*(r) = \left(\bigcup_{s > -r} \lambda(s) \right)^* \quad (r \in \mathbb{R}).$$

La norme α est autoduale si et seulement si la fonction de réseaux associée l'est, c'est-à-dire coïncide avec la fonction duale λ_α^* [2, Corollaire 3.4].

Si α_1 et α_2 sont des normes sur V_1 et V_2 respectivement, alors

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 : v_1 + v_2 \mapsto \min \{\alpha_1(v_1), \alpha_2(v_2)\} \quad (v_1 \in V_1, v_2 \in V_2)$$

est une norme sur $V_1 \oplus V_2$. Une norme α sur V est dite *scindée* par une décomposition en somme directe $V = V_1 \oplus V_2$ si $\alpha = \alpha|_{V_1} \wedge \alpha|_{V_2}$. La notion correspondante pour une fonction de réseaux λ est : $\lambda(r) = \lambda(r) \cap V_1 \oplus \lambda(r) \cap V_2$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Enfin une base $(e_i)_{i \in I}$ de V est une *base scindante* pour α si la décomposition en somme de droites associée scinde α . Si c'est le cas, la base duale $(e_i^*)_{i \in I}$ scinde α^* et, pour tout $i \in I$, $\alpha^*(e_i^*) = -\alpha(e_i)$.

Supposons V muni d'une forme non dégénérée.

- Si V est somme orthogonale de V_1 et V_2 alors la norme duale de $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ est $\alpha_1^* \wedge \alpha_2^*$; la norme $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ est autoduale si et seulement si α_1 et α_2 le sont.

Si α est une norme autoduale sur V , elle est scindée par $V = V_1 \perp V_2$ si et seulement si ses restrictions à V_1 et V_2 sont autoduales. (Condition suffisante : $\alpha|_{V_1} \wedge \alpha|_{V_2}$ est alors autoduale et minore α , d'où l'égalité car toutes deux sont maximinorantes.)

- Si V est somme directe de W^+ et W^- , sous-espaces totalement isotropes en dualité, et si α^+ est une norme sur W^+ , α^- une norme sur W^- , alors la norme duale de $\alpha^+ \wedge \alpha^-$ est $(\alpha^-)^\# \wedge (\alpha^+)^\#$ où $(\alpha^+)^\#$ est définie par

$$(\alpha^+)^\#(v) = \inf_{x \in W^+} (v_F(f(v, x)) - \alpha^+(x)) \quad (v \in W^-). \quad (1.11)$$

et de même pour $(\alpha^-)^\sharp$. La norme $\alpha^+ \wedge \alpha^-$ est autoduale si et seulement si $\alpha^- = (\alpha^+)^\sharp$.

Examinons à présent les propriétés des normes d'algèbre autoduales de l'algèbre d'octonions V scindées par une décomposition $V = V^0 \perp W$ comme au paragraphe précédent. Notre objectif est de montrer qu'une telle norme est entièrement déterminée par sa restriction à W et de caractériser cette restriction.

Lemme 1.12. *Soit V^0 une sous-algèbre de composition de V , W son orthogonal et α une norme d'algèbre autoduale de V scindée par la décomposition $V = V^0 \perp W$. Alors $\alpha|_{V^0}$ est une norme d'algèbre autoduale de V^0 et $\alpha|_W$ est une norme autoduale de W . De plus :*

- si V^0 est anisotrope on a $\alpha|_{V^0} = \frac{1}{2} v_F \circ Q$;
- si V^0 est de dimension 2 et déployée, d'idempotents orthogonaux e^+ et e^- , on a $\alpha(\xi e^+ + \mu e^-) = \min \{v_F(\xi), v_F(\mu)\}$ ($\xi, \mu \in F$).

Démonstration. La première assertion découle des rappels ci-dessus. Pour la seconde rappe-lons qu'en caractéristique résiduelle différente de 2, une norme est autoduale si et seulement si elle est maximinorante, i.e. élément maximal de l'ensemble des normes vérifiant

$$\alpha(x) + \alpha(y) \leq v_F(f(x, y)) \quad (x, y \in V)$$

(voir [8, §2] ou [2, Proposition 3.2], ou la référence originelle [4, Proposition 2.5]). La norme $\alpha|_{V^0}$ vérifie donc $\alpha|_{V^0}(x) \leq \frac{1}{2} v_F(Q(x))$ pour tout $x \in V^0$. Il reste à vérifier que si V^0 est anisotrope, $\frac{1}{2} v_F \circ Q$ est bien une norme sur V^0 et vérifie la condition de minoration ci-dessus, ce qui est facile.

Supposons maintenant V^0 déployée de dimension 2. On a pour $\xi, \mu \in F$:

$$\alpha(\xi e^+ + \mu e^-) + \alpha(e^+) \leq \alpha((\xi e^+ + \mu e^-)e^+) = \alpha(\xi e^+) = v_F(\xi) + \alpha(e^+)$$

$$\text{et de même } \alpha(\xi e^+ + \mu e^-) + \alpha(e^-) \leq v_F(\mu) + \alpha(e^-)$$

donc $\alpha(\xi e^+ + \mu e^-) \leq \min \{v_F(\xi), v_F(\mu)\}$. Mais α est maximinorante et $\xi e^+ + \mu e^- \mapsto \min \{v_F(\xi), v_F(\mu)\}$ définit bien une norme autoduale (immédiat via 1.11), d'où l'égalité. ■

Lemme 1.13. *Soit E une extension quadratique de F d'indice de ramification e . Soit W un espace vectoriel sur E muni d'une forme quadratique f pour sa structure d'espace vectoriel sur F et soit Φ la forme hermitienne correspondante, caractérisée par $f = \text{tr}_{E/F} \circ \Phi$. Alors $\alpha \mapsto \frac{1}{e} \alpha$ est une bijection de l'ensemble des E -normes sur W autoduales relativement à Φ et l'ensemble des F -normes γ sur W autoduales relativement à f et vérifiant, pour $x \in W$ et $\xi \in E$: $\gamma(\xi x) = \frac{1}{e} v_E(\xi) + \gamma(x)$.*

Démonstration. Si l'on supprime de part et d'autre la condition d'autodualité l'énoncé est immédiat. Examinons les conditions d'autodualité en termes des fonctions de réseaux associées. Si L est un \mathfrak{o}_E -réseau de W , son dual L^* relativement à f et son dual

$$L^\sharp = \{x \in W / \Phi(x, L) \subset \mathfrak{p}_E\}$$

relativement à Φ coïncident. Si α est une norme autoduale relativement à Φ , on vérifie que $\lambda_\alpha^\sharp(er) = \lambda_{\frac{1}{e}\alpha}^*(r)$. On en déduit : $\lambda_\alpha^\sharp = \lambda_\alpha \iff \lambda_{\frac{1}{e}\alpha}^* = \lambda_{\frac{1}{e}\alpha}$, d'où l'énoncé. \blacksquare

Rappelons ([3, §1.9]) que le volume d'un réseau L d'un F -espace vectoriel de dimension finie W est défini moyennant le choix d'un réseau particulier L_0 de W par $\text{vol}(L) = v_F(\det g)$ où $g \in GL_F(W)$ vérifie $g(L_0) = L$. Le volume d'une norme α sur W est alors défini au moyen d'une base scindante $(e_i)_{i \in I}$ de α et du \mathfrak{o}_F -réseau L engendré par cette base par

$$\text{vol } \alpha = \text{vol } L - \sum_{i \in I} \alpha(e_i).$$

Cette quantité est indépendante du choix d'une base scindante.

Proposition 1.14. *Soit α une norme d'algèbre autoduale de V scindée par $V = V^0 \perp W$ où V^0 est de dimension 2 et déployée, d'idempotents orthogonaux e^+ et e^- . Soit $W = W^+ \oplus W^-$ la polarisation complète de W associée : $W^+ = e^+W$ et $W^- = e^-W$.*

- (i) *La restriction de α à W est scindée par $W = W^+ \oplus W^-$, donc de la forme $\alpha^+ \wedge \alpha^-$ avec $\alpha^- = (\alpha^+)^\sharp$ (cf 1.11).*
- (ii) *Pour toute base (f_1^+, f_2^+, f_3^+) de W^+ on note (f_1^-, f_2^-, f_3^-) la base duale de W^- . Alors $f_1^- f_2^-$ est un multiple non nul de f_3^+ . Appelons base spéciale de W^+ toute base (f_1^+, f_2^+, f_3^+) telle que $f_3^+ = f_1^- f_2^-$. Les réseaux engendrés par les bases spéciales de W^+ ont tous même volume.*
- (iii) *On normalise le volume de sorte que les réseaux engendrés par les bases spéciales de W^+ soient de volume nul. Alors la restriction de α à W^+ est de volume nul.*
- (iv) *Réciproquement, soit α^+ une norme de W^+ de volume nul pour la normalisation ci-dessus, soit $\alpha^- = (\alpha^+)^\sharp$, norme de W^- , et soit α_0 l'unique norme d'algèbre autoduale de V^0 . Alors $\alpha_0 \wedge \alpha^+ \wedge \alpha^-$ est une norme d'algèbre autoduale de V , l'unique telle norme scindée par $V = V^0 \perp W$ et prolongeant α^+ .*

Démonstration. (i) Soit $w \in W$, il s'écrit $w = e^+w + e^-w$ avec $e^+w \in W^+$ et $e^-w \in W^-$. On a $\alpha(e^+w) \geq \alpha(e^+) + \alpha(w) = \alpha(w)$ (Lemme 1.12) et de même pour $\alpha(e^-w)$, donc : $\alpha(w) \geq \min(\alpha(e^+w), \alpha(e^-w)) \geq \alpha(w)$ d'où l'égalité.

(ii) Pour $i = 1, 2, 3$, l'élément $a_i = f_i^+ + f_i^-$ est de norme 1, on peut donc utiliser le procédé de doublement (Proposition 1.2) pour calculer dans $V^0 \perp V^0 a_i$ (qui est une algèbre associative) les produits suivants : $f_i^+ f_i^- = -e^+$, $f_i^- f_i^+ = -e^-$, $f_i^+ f_i^+ = f_i^- f_i^- = 0$. Par ailleurs on vérifie que pour $x, y \in W^+$ (resp. W^-) le produit xy appartient à W^- (resp. W^+). On en déduit immédiatement que $f_1^- f_2^-$ est un élément de W^+ orthogonal à f_1^- et f_2^- . Toujours par doublement, l'espace engendré par $f_2^+, f_2^-, f_3^+, f_3^-$ est l'orthogonal de $V^0 \perp V^0 a_1$, égal à $(V^0 \perp V^0 a_1) a_2$. De fait $f_1^- f_2^- = (e^- a_1)(e^- a_2) = (e^- e^- a_1) a_2 = f_1^- a_2$ est non nul.

Posons $f_1^- f_2^- = \mu f_3^+$ avec $\mu \in F^\times$ et soit v le volume du réseau de base (f_1^+, f_2^+, f_3^+) . Le réseau engendré par la base spéciale $(f_1^+, f_2^+, f_1^- f_2^-)$ a pour volume $v + \nu_F(\mu)$. Un réseau arbitraire est image par $g \in \text{GL}(3, F)$ du premier et détermine une base spéciale $(g f_1^+, g f_2^+, ({}^t g^{-1} f_1^-)({}^t g^{-1} f_2^-))$ engendrant un réseau de volume $v + \nu_F(\det g) + \nu_F(\mu')$ avec $\mu' = f({}^t g^{-1} f_3^-, ({}^t g^{-1} f_1^-)({}^t g^{-1} f_2^-))$.

Posons $d = \det g^{-1}$; alors $g' = g \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ appartient à $\text{SL}(3, F)$ et détermine un élément \tilde{g} de G valant l'identité sur V^0 , g' sur W^+ et ${}^t g'^{-1}$ sur W^- . Ainsi :

$$\mu' = d f(\tilde{g}(f_3^-), \tilde{g}(f_1^-) \tilde{g}(f_2^-)) = d f(\tilde{g}(f_3^-), \tilde{g}(f_1^- f_2^-)) = d \mu.$$

(iii) Partant d'une base (f_1^+, f_2^+, f_3^+) scindant α , la base spéciale $(f_1^+, f_2^+, f_1^- f_2^-)$ scinde α et $\text{vol } \alpha^+ = -\alpha^+(f_1^+) - \alpha^+(f_2^+) - \alpha^+(f_1^- f_2^-)$. Rappelons que $\alpha^+(f_i^+) = -\alpha^-(f_i^-)$ [3, (18)]. Comme la base duale de $(f_1^+, f_2^+, f_1^- f_2^-)$ est $(f_1^-, f_2^-, f_1^+ f_2^+)$, on a

$$\alpha^+(f_1^- f_2^-) = -\alpha^-(f_1^+ f_2^+) \leq -\alpha(f_1^+) - \alpha(f_2^+),$$

soit $\text{vol } \alpha^+ \geq 0$. Echangeons les rôles de W^+ et W^- : on obtient

$$-\alpha^-(f_1^-) - \alpha^-(f_2^-) - \alpha^-(f_1^+ f_2^+) \geq 0,$$

c'est-à-dire $\text{vol } \alpha^+ \leq 0$, c.q.f.d.

(iv) Bien sûr $\alpha = \alpha_0 \wedge \alpha^+ \wedge \alpha^-$ est une norme autoduale de V ; il s'agit de montrer que c'est une norme d'algèbre. Soit $(f_1^+, f_2^+, f_1^- f_2^-)$ une base spéciale de W^+ scindant α^+ . D'après [8, Lemma 2.1] il suffit de montrer que la propriété $\alpha(xy) \geq \alpha(x) + \alpha(y)$ est valide lorsque x et y appartiennent à la base $(e^+, e^-, f_1^+, f_2^+, f_1^- f_2^-, f_1^-, f_2^-, f_1^+ f_2^+)$ de V . C'est une vérification facile en utilisant les propriétés déjà mentionnées et le procédé de doublement, qui permet d'établir que les produits $f_i^+ f_j^-$ et $f_i^- f_j^+$ sont nuls pour $i \neq j$ et que l'image d'une base spéciale par permutation circulaire reste spéciale. ■

Proposition 1.15. *Soit α une norme d'algèbre autoduale de V scindée par $V = V^0 \perp W$ où V^0 est une extension quadratique F' de F , d'indice de ramification e ; notons α_W sa restriction à W . Soit Φ la forme hermitienne sur V caractérisée par $f = \text{tr}_{F'/F} \circ \Phi$.*

- (i) *Pour toute base orthogonale (f_1, f_2, f_3) de W sur F' , $f_1 f_2$ est un multiple non nul de f_3 . Appelons base spéciale de W toute base de Witt (e_{-1}, e_0, e_1) sur F' telle que*

$Q(e_{-1}) = Q(e_1) = 0$, $\Phi(e_{-1}, e_1) = 1$, $e_0 = (e_{-1} + e_1)(e_{-1} - e_1)$. Les $\mathfrak{o}_{F'}$ -réseaux engendrés par les bases spéciales de W ont tous même volume et si l'on normalise le volume de sorte que les $\mathfrak{o}_{F'}$ -réseaux engendrés par les bases spéciales de W soient de volume nul, alors les F' -normes autoduales de W sont de volume nul.

- (ii) La norme $e\alpha_W$ est une F' -norme autoduale sur W .
- (iii) Réciproquement, soit α' une F' -norme autoduale de W et soit α_0 l'unique norme d'algèbre autoduale de V^0 . Alors $\alpha_0 \wedge \frac{1}{e}\alpha'$ est une norme d'algèbre autoduale de V , l'unique telle norme scindée par $V = V^0 \perp W$ et prolongeant $\frac{1}{e}\alpha'$.

Démonstration. (i) Le procédé de doublement (1.2) donne $W = F'f_1 \perp (F' \perp F'f_1)f_2$, donc $(F'f_1)f_2 = F'f_3$ (de sorte que le déterminant de $\Phi|_W$ est une norme de F' sur F). Le réseau engendré par la base spéciale (e_{-1}, e_1, e_0) est identique au réseau engendré par la base orthogonale $(e_{-1} + e_1, e_{-1} - e_1, e_0)$ ($p \neq 2$). Il suffit donc de montrer que le volume est constant sur l'ensemble des $\mathfrak{o}_{F'}$ -réseaux engendrés par des bases orthogonales (f_1, f_2, f_3) telles que $Q(f_1)Q(f_2)Q(f_3) = 1$. Soient (f_1, f_2, f_3) et (f'_1, f'_2, f'_3) deux telles bases. Quitte à permuter les vecteurs et à multiplier le premier par $a \in F'^\times$ et le second par a^{-1} , on peut supposer $Q(f_1) = Q(f'_1) = 1$. Il y a alors une isométrie de W envoyant f_1 sur f'_1 , ce qui permet de se ramener à la question analogue en dimension 2. Soit alors $g \in GL(2, F')$ envoyant f_2, f_3 sur f'_2, f'_3 . En écrivant les conditions $\Phi(f'_2, f'_3) = 0$ et $\Phi(f'_2, f'_2)\Phi(f'_3, f'_3) = 1$ on obtient immédiatement $\det g^2 = 1$.

Une norme autoduale α' sur W a même volume que sa norme duale. Or elle est scindée par une base de Witt, donc aussi par une base spéciale (e_{-1}, e_1, e_0) , dont la base duale (e_1, e_{-1}, te_0) ($t \in \mathfrak{o}_{F'}$) engendre le même réseau. La norme duale vérifie $(\alpha')^*(e_i^*) = -\alpha'(e_i)$, son volume est donc l'opposé de celui de α' , d'où la nullité.

(ii) Pour $u \in F'^\times$ et $w \in W$ on a $\alpha(u) + \alpha(w) \leq \alpha(uw) \leq -\alpha(u^{-1}) + \alpha(w)$. On en déduit par le lemme 1.12 que $\alpha(uw) = \frac{1}{2}v_F \circ Q(u) + \alpha(w)$, puis par le lemme 1.13 que $e\alpha_W$ est une F' -norme autoduale sur W .

(iii) Soit $(1, \epsilon)$ une base de V^0 scindante pour α_0 et (e_{-1}, e_1, e_0) une base spéciale de W scindant α' . Posons $\alpha = \alpha_0 \wedge \frac{1}{e}\alpha'$. Il suffit d'établir $\alpha(xy) \geq \alpha(x) + \alpha(y)$ lorsque x et y appartiennent à la base $(1, \epsilon, e_{-1}, \epsilon e_{-1}, e_1, \epsilon e_1, e_0, \epsilon e_0)$ de V [8, Lemma 2.1]. Ce sont des vérifications faciles, basées sur le lemme 1.5, le fait que $\alpha(\xi v) = \frac{1}{e}v_{F'}(\xi) + \alpha(v)$ ($\xi \in F'$, $v \in V$) et l'autodualité de α' , soit : $\alpha'(e_{-1}) + \alpha'(e_1) = 0$, $\alpha'(e_0) = 0$. ■

Proposition 1.16. Soit V^0 une sous-algèbre de composition de dimension 4 de V et W son orthogonal.

- (i) Si V^0 est anisotrope, alors W l'est aussi et chacun possède une unique norme autoduale, soit $\alpha_0 = \frac{1}{2}v_F \circ Q$ et $\alpha_W = \frac{1}{2}v_F \circ Q$ respectivement. La norme $\alpha_0 \wedge \alpha_W$ est une

norme d'algèbre autoduale de V . La norme α_0 est scindée par toute décomposition $V^0 = F' \perp F'^\perp$ où F' est un sous-corps de V^0 de degré 2 sur F .

- (ii) Si V^0 est déployée, pour toute norme autoduale α_W de W il existe une et une seule norme d'algèbre autoduale α_0 de V^0 telle que $\alpha_0 \wedge \alpha_W$ soit une norme d'algèbre autoduale de V . Si en outre il existe une extension quadratique F' de F dans V^0 telle que α_W soit de la forme $\frac{1}{e} \alpha'$ pour une F' -norme autoduale α' de W , alors $e\alpha_0$ est une F' -norme autoduale de V^0 .

Démonstration. La première assertion de (i) est immédiate via le lemme 1.12. Quant au scindage, il suffit de vérifier que les restrictions de α_0 à F' et à son orthogonal sont autoduales, ce qui est facile.

Passons à (ii). La norme α_W est scindée par une base de Witt (h, h', k, k') avec $f(h, h') = f(k, k') = 1$, les autres valeurs de f sur cette base étant nulles. Aux droites $L = Fh$ et $L' = Fh'$ on attache les éléments $e^+ = -hh'$, $e^- = -h'h$ et $c = e^+ - e^-$ du lemme 1.5 ; ils appartiennent à V^0 par doublement, puisque $W = V^0(h - h')$, ainsi que l'élément $b = (k + k')(h - h')$. En outre b est de norme -1 et orthogonal à c , de sorte que

$$V^0 = F[c] \perp F[c]b = (Fe^+ \oplus Fe^-) \perp (Fe^+b \oplus Fe^-b). \quad (1.17)$$

Les droites $F(e^+b)(h - h') \subset e^-W$ et $F(e^-b)(h - h') \subset e^+W$ sont les deux droites isotropes de l'orthogonal de $L \oplus L'$ dans W et l'on a $f((e^+b)(h - h'), (e^-b)(h - h')) = 1$; quitte à échanger k et k' on peut supposer que $(e^+b)(h - h')$ est multiple de k' et on voit aisément qu'on a alors égalité : $(e^+b)(h - h') = k'$ et $(e^-b)(h - h') = k$. Alors :

$$-h'k' = [e^-(h - h')][(e^+b)(h - h')] = \overline{(e^+b)}e^- = \bar{b}e^-e^- = -be^-$$

et de même $hk = -be^+$.

Ces petits calculs vont nous permettre de montrer que si α_0 est une norme d'algèbre autoduale de V^0 telle que $\alpha = \alpha_0 \wedge \alpha_W$ soit une norme d'algèbre autoduale de V , alors elle est scindée par les décompositions 1.17. De fait :

- $\alpha_0((e^+)^2) \geq 2\alpha_0(e^+)$ entraîne $\alpha_0(e^+) \leq 0$ mais $\alpha_0(e^+) = \alpha_0(hh') \geq \alpha_W(h) + \alpha_W(h')$, qui vaut 0 par autodualité. Donc $\alpha_0(e^+) = 0$ et de même $\alpha_0(e^-) = 0$.
- Pour tout $v \in V$ on a donc $\alpha(v) = \min \{\alpha(e^+v), \alpha(e^-v)\}$ (cf. preuve de 1.14 (i)).
- Enfin $(e^-b)(e^+b) = \overline{e^+}e^- = e^-$ donc

$$0 \geq \alpha_0(e^-b) + \alpha_0(e^+b) = \alpha_0(h'k') + \alpha_0(hk) \geq \alpha_W(h') + \alpha_W(k') + \alpha_W(h) + \alpha_W(k)$$
 qui vaut 0 par autodualité, soit : $\alpha_0(e^-b) + \alpha_0(e^+b) = 0$.

Ainsi $\alpha_{0|F[c]}$ est l'unique norme d'algèbre autoduale de $F[c]$ (lemme 1.12 (i)) et $\alpha_{0|F[c]b}$ est autoduale, α_0 est donc autoduale scindée par $F[c] \perp F[c]b$ et α scindée par $V = F[c] \perp F[c]^\perp$. Il reste à utiliser la proposition 1.14 : α est une norme d'algèbre autoduale si et seulement si $\alpha_0(e^+b) + \alpha_W(h) + \alpha_W(k) = 0$, ce qui détermine α_0 .

Pour la dernière assertion, il suffit de remarquer que, notant X^0 l'orthogonal de F' dans V^0 , l'espace $X = X^0 \perp W$ est hermitien de dimension 3 sur F' , agissant par multiplication à gauche. Si (h, h') est une base de Witt de W sur F' scindant α' , l'élément $(h + h')(h - h')$ appartient à X^0 et α' se prolonge de façon unique en une F' -norme autoduale de X , d'où par la proposition 1.15 (iii) une unique norme d'algèbre autoduale α scindée par $V = F' \perp X$ et prolongeant $\frac{1}{e}\alpha'$. Par unicité c'est la même que la précédente. ■

Revenons pour terminer au langage des suites de réseaux. Soit α une norme à valeurs rationnelles sur V et λ_α la fonction de réseaux associée. Soit m_α le p.p.c.m. des dénominateurs des valeurs de α écrites sous forme de fractions irréductibles, c'est-à-dire

$$m_\alpha = \min \{t \in \mathbb{N} / \alpha(V - \{0\}) \subseteq \frac{1}{t}\mathbb{Z}\}.$$

On définit une suite de réseaux Λ_α de période minimale, par

$$\Lambda_\alpha(i) = \lambda_\alpha\left(\frac{i}{m_\alpha}\right) \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

Si α est autoduale, la suite est autoduale et d'invariant 1 : $\Lambda_\alpha(i)^* = \Lambda_\alpha(1-i)$, conformément aux conventions de [18] et [19].

Il est élémentaire de vérifier que, dans la situation de la proposition 1.14 (iv) et en posant $\alpha = \alpha_0 \wedge \alpha^+ \wedge \alpha^-$, on a pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$\Lambda_\alpha(i) \cap W^+ = \Lambda_{\alpha^+}(i).$$

De même, dans la situation de la proposition 1.15 (iii) et en posant $\alpha = \alpha_0 \wedge \frac{1}{e}\alpha'$, on a pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$\Lambda_\alpha(i) \cap W = \Lambda_{\alpha'}(i),$$

suite autoduale pour la structure F' -hermitienne de W . Ainsi le passage par les normes résout le problème habituel de normalisation des suites de réseaux dans une sommation. Pour faciliter les références nous résumons cette discussion ci-dessous.

Notation 1.18. Fixons une sous-algèbre de composition D de dimension 2 et hyperbolique de V . Pour toute suite de réseaux Λ de W_D^+ attachée à une norme de volume nul, on note $\tilde{\Lambda}$ l'unique suite de réseaux de V correspondant à une norme d'algèbre autoduale de V scindée par $V = D \perp (W_D^+ \oplus W_D^-)$ et vérifiant : $\forall i \in \mathbb{Z}, \tilde{\Lambda}(i) \cap W_D^+ = \Lambda(i)$.

Notation 1.19. Fixons une sous-algèbre de composition D de dimension 2 et anisotrope de V . Pour toute suite de \mathfrak{o}_D -réseaux Λ de D^\perp attachée à une D -norme autoduale, on note $\vec{\Lambda}$ l'unique suite de réseaux de V correspondant à une norme d'algèbre autoduale de V scindée par $V = D \perp D^\perp$ et vérifiant : $\forall i \in \mathbb{Z}, \vec{\Lambda}(i) \cap D^\perp = \Lambda(i)$.

Notation 1.20. Fixons une sous-algèbre de composition D de dimension 4 de V . Pour toute suite de réseaux Λ de D^\perp , autoduale et d'invariant 1, on note $\hat{\Lambda}$ l'unique suite de réseaux de V correspondant à une norme d'algèbre autoduale de V scindée par $V = D \perp D^\perp$ et vérifiant : $\forall i \in \mathbb{Z}, \hat{\Lambda}(i) \cap D^\perp = \Lambda(i)$.

On notera que, d'après la démonstration de la proposition 1.16, les suites de réseaux de 1.20 sont toujours également de la forme 1.18 ou 1.19. D'ailleurs, toute suite de réseaux de V attachée à une norme d'algèbre autoduale est de la forme $\vec{\Lambda}$ (1.18) par [8, Proposition 8.1]. Toutefois c'est le point de vue ci-dessus qui nous sera utile dans ce qui suit, et pour commencer dans le lemme 1.21. Il s'agit d'une version du lemme 2.8 de [19] pour le groupe $G_2(F)$; remarquons que le lemme initial se généralise sans problème du cas des strates gauches à celui des strates autoduales.

Lemme 1.21. Soit β un élément semi-simple non nul de $\mathfrak{g}_2(F)$ dont on note V^0 le noyau, d'orthogonal W . Soit B_{β_W} le commutant de β_W dans $\mathfrak{gl}_F(W)$. Soient Λ et Λ' deux suites de réseaux autoduales de V correspondant à des points de l'immeuble de $G_2(F)$ et normalisées par $F[\beta]^\times$. Supposons que $\tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda'_W) \cap B_{\beta_W} \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda_W) \cap B_{\beta_W}$. Alors il existe une suite de réseaux autoduale Λ'' de V correspondant à un point de l'immeuble de $G_2(F)$ et normalisée par $F[\beta]^\times$, telle que :

$$\tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda''_W) \cap B_{\beta_W} = \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda'_W) \cap B_{\beta_W} \text{ et } \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda'') \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda).$$

Démonstration. Par définition d'une strate semi-simple, les suites de réseaux Λ et Λ' sont scindées par la décomposition $V = V^0 \perp W$ et le centralisateur de β est produit de $\mathfrak{gl}_F(V^0)$ et de son intersection avec $\mathfrak{gl}_F(W)$. Distinguons le cas (i) : V^0 déployée de dimension 2, des autres cas : V^0 anisotrope ou déployée de dimension 4. Pour le cas (i) on décompose davantage via la polarisation complète $W = W^+ \oplus W^-$ qui scinde les suites de réseaux données ; le centralisateur de β_W est produit de ses intersections avec $\mathfrak{gl}_F(W^+)$ et $\mathfrak{gl}_F(W^-)$ (lemme 1.9), de sorte que :

$$\tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda'_W) \cap B_{\beta_W} \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda_W) \cap B_{\beta_W} \iff \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda'_{W^+}) \cap B_{\beta_{W^+}} \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda_{W^+}) \cap B_{\beta_{W^+}}.$$

Appliquons alors [19, Lemma 2.8] dans W^+ (cas (i)) ou W : il existe une suite de réseaux $\Lambda_{W^+}^\diamond$ de W^+ (cas (i)) ou Λ_W^\diamond de W , normalisée par $F[\beta_{W^+}]^\times$ (cas (i)) ou $F[\beta_W]^\times$, telle que :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda_{W^+}^\diamond) \cap B_{\beta_{W^+}} &= \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda'_{W^+}) \cap B_{\beta_{W^+}} & \text{et } \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda_{W^+}^\diamond) &\subseteq \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda_{W^+}) & \text{(cas (i))} \\ \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda_W^\diamond) \cap B_{\beta_W} &= \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda'_W) \cap B_{\beta_W} & \text{et } \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda_W^\diamond) &\subseteq \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda_W) & \text{(autres cas).} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Dans le cas (i) on peut traduire pour que la norme associée à $\Lambda_{W^+}^\diamond$ soit de volume nul en base spéciale, cela ne change pas $\tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda_{W^+}^\diamond)$. Dans les autres cas les suites Λ_W et Λ'_W sont des suites de V^0 -réseaux autoduales pour une structure hermitienne ou orthogonale et par *loc. cit.* on peut choisir Λ_W^\diamond de même.

Tout choix d'une telle suite $\Lambda_{W^+}^\diamond$ ou Λ_W^\diamond détermine une unique suite de réseaux Λ^\diamond de V correspondant à un point de l'immeuble de $G_2(F)$, normalisée par $F[\beta]^\times$: c'est le procédé canonique qu'on a développé plus haut, qui fournit une inclusion naturelle de l'immeuble \mathcal{I} de $SL_F(W^+)$ (1.18), $SU(W, V^0/F)$ (1.19) ou $SO_F(W)$ (1.20) dans l'immeuble de $G_2(F)$. Ces inclusions conservent le barycentre puisqu'elles s'obtiennent par prolongement unique de normes, elles sont donc continues. Pour la même raison, l'inclusion naturelle de l'immeuble de $G_2(F)$ dans l'immeuble étendu de $GL_F(V)$, donnée par le fait qu'une norme d'algèbre autoduale sur V est une norme sur V , est continue.

Or les conditions (1.22) restent vérifiées pour tout point de l'intersection avec \mathcal{I} de la facette $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\Lambda_{W^+}^\diamond$ ou Λ_W^\diamond dans l'immeuble étendu de $GL_F(W^+)$ ou $GL_F(W)$ et affirment que Λ_{W^+} ou Λ_W est adhérent à la facette $\tilde{\mathcal{F}}$. Considérons le segment géodésique $[\Lambda_{W^+}^\diamond, \Lambda_{W^+}]$ ou $[\Lambda_W^\diamond, \Lambda_W]$ dans \mathcal{I} qui s'identifie par l'inclusion canonique avec le segment $[\Lambda^\diamond, \Lambda]$ de l'immeuble de $G_2(F)$. Un voisinage \mathcal{V} assez petit de Λ dans l'immeuble de $G_2(F)$ ne contient que des points Λ''' tels que $\tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda''') \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda)$. L'intersection de \mathcal{V} avec $[\Lambda^\diamond, \Lambda]$ est formée de points Λ'' tels que Λ_{W^+}'' ou Λ_W'' appartienne à $\tilde{\mathcal{F}} \cap \mathcal{I}$ (car les facettes sont convexes donc $[\Lambda_{W^+}^\diamond, \Lambda_{W^+}[$, resp. $[\Lambda_W^\diamond, \Lambda_W[$, est tout entier contenu dans la facette $\tilde{\mathcal{F}}$). Tout tel point Λ'' vérifie les conditions voulues. ■

1.7 Classification des strates semi-simples de $\mathfrak{g}_2(F)$

L'étude du paragraphe 1.4, dont on reprend les notations, nous permet d'établir une liste des formes possibles de strates semi-simples non nulles de $\mathfrak{g}_2(F)$. Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$, $0 \leq r < n$, une telle strate, soit V^0 le sous-espace propre de β pour la valeur propre nulle et soit W son orthogonal. Lorsque V' est un sous-espace de V stable par β , on note $\beta_{V'}$ la restriction de β à V' (en tant qu'endomorphisme de V') et $\Lambda_{V'}$ la suite définie par : $\Lambda_{V'}(i) = \Lambda(i) \cap V'$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. La strate a l'une des formes suivantes :

- (i) V^0 est un plan hyperbolique. Alors W possède une polarisation complète uniquement déterminée par V^0 , $W = W^+ \oplus W^-$, qui est stable par β et la strate $[\Lambda_{W^+}, n, r, \beta_{W^+}]$ est une strate semi-simple dans $\mathfrak{sl}(3, F)$ telle que β_{W^+} n'ait aucune valeur propre nulle ;
- (ii) V^0 est une extension quadratique F' de F . Alors W est un F' -espace vectoriel muni d'une forme hermitienne et la strate $[\Lambda_W, n, r, \beta_W]$ est une strate semi-simple dans $\mathfrak{su}(2, 1)(F'/F)$ telle que β_W n'ait aucune valeur propre nulle ;

- (iii) V^0 est de dimension 4 et $\beta_W^2 = \lambda^2 \text{Id}_W$ pour un $\lambda \in F^\times$. Alors V^0 est déployée, les espaces propres W_λ et $W_{-\lambda}$ de β associés aux valeurs propres non nulles définissent une polarisation complète de W et la strate $[\Lambda_{W_\lambda}, n, r, \beta_{W_\lambda}]$ est une strate scalaire dans $\mathfrak{gl}(2, F)$;
- (iv) V^0 est de dimension 4 et $\beta_W^2 = u \text{Id}_W$ où $u \in F$ n'est pas un carré. Alors β_W munit W d'une structure de $F[\beta_W]$ -espace vectoriel hermitien et la strate $[\Lambda_W, n, r, \beta_W]$ est une strate scalaire dans $\mathfrak{u}(W, F[\beta_W]/F)$.

Théorème 1.23. *La liste ci-dessus est exhaustive et toutes ces formes sont obtenues.*

Précisément, soit D une sous-algèbre de composition de dimension 2 de V .

- *Si D est un plan hyperbolique et $D^\perp = W^+ \oplus W^-$ la polarisation complète associée, pour toute strate semi-simple $[\Lambda_{W^+}, n, r, \beta_{W^+}]$ de $\mathfrak{sl}(W^+)$, la strate $[\check{\Lambda}_{W^+}, n, r, \check{\beta}_{W^+}]$ est une strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$, dite “strate de type D ”.*

En outre, si $[\Lambda_{W^+}, n, r+1, \gamma_{W^+}]$ est une strate semi-simple de $\mathfrak{sl}(W^+)$ équivalente à $[\Lambda_{W^+}, n, r+1, \beta_{W^+}]$, alors la strate semi-simple $[\check{\Lambda}_{W^+}, n, r+1, \check{\gamma}_{W^+}]$ de $\mathfrak{g}_2(F)$ est équivalente à $[\check{\Lambda}_{W^+}, n, r+1, \check{\beta}_{W^+}]$.

- *Si D est une extension quadratique de F et $W = D^\perp$, pour toute strate semi-simple $[\Lambda_W, n, r, \beta_W]$ de $\mathfrak{su}(W)$, la strate $[\vec{\Lambda}_W, n, r, \vec{\beta}_W]$ est une strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$, dite “strate de type D ”.*

En outre, si $[\Lambda_W, n, r+1, \gamma_W]$ est une strate semi-simple de $\mathfrak{su}(W)$ équivalente à $[\Lambda_W, n, r+1, \beta_W]$, alors la strate semi-simple $[\vec{\Lambda}_W, n, r+1, \vec{\gamma}_W]$ de $\mathfrak{g}_2(F)$ est équivalente à $[\vec{\Lambda}_W, n, r+1, \vec{\beta}_W]$.

Toute strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$ est obtenue par l'un ou l'autre de ces procédés.

Démonstration. Le procédé donné associe à une strate de $\mathfrak{sl}(W^+)$ ou $\mathfrak{su}(W)$ une strate de $\mathfrak{g}_2(F)$: c'est une conséquence directe des injections d'algèbres de Lie rappelées au paragraphe 1.1 (notations 1.3 et 1.4) d'une part et des constructions de normes faites au paragraphe 1.6 (notations 1.18 et 1.19) d'autre part. Puisque les éléments semi-simples considérés sont prolongés par 0 sur D , ces constructions (1.18) et (1.19) assurent que la valuation relativement à la suite de réseaux considérée est conservée : c'est $-n$. Ce procédé est compatible à l'équivalence de strates par [6, Proposition 2.9].

Il nous faut encore vérifier que la strate obtenue est semi-simple pour le même entier r , $0 \leq r < n$ (le cas des strates nulles, $r = n$, est immédiat), en revenant à la définition de [18] rappelée au paragraphe 1.2. Remarquons que la somme d'une strate semi-simple et d'une strate nulle est toujours une strate semi-simple et qu'en outre une strate semi-simple de $\mathfrak{su}(W, D/F)$ est aussi une strate semi-simple de $\text{End}_F(W)$, avec une décomposition peut-être moins fine de W . Le résultat est donc clair sauf si D est un plan hyperbolique :

il faut alors montrer que si $[\Lambda_{W^+}, n, r, \beta_{W^+}]$ est une strate semi-simple de $\mathfrak{sl}(W^+)$, alors $[\Lambda_{W^+} \oplus \Lambda_{W^-}, n, r, \beta_{W^+} + \beta_{W^-}]$ est une strate semi-simple de $\mathfrak{so}_F(W^+ \oplus W^-)$, dans les notations du lemme 1.9 que nous utilisons ci-après. Il s'agit d'une démonstration au cas par cas, le résultat ne serait pas vrai si β_{W^+} n'était pas de trace nulle. Nous raisonnons comme dans le lemme 1.9 sur les polynômes minimaux P^+ et P^- de β_{W^+} et β_{W^-} .

- Si P^+ est irréductible, il est de degré 3 et l'élément β_{W^+} est minimal (lemme 1.10) ; les polynômes caractéristiques des strates $[\Lambda_{W^+}, n, n-1, \beta_{W^+}]$ et $[\Lambda_{W^-}, n, n-1, \beta_{W^-}]$ sont premiers entre eux, la somme est bien semi-simple.
- Si P^+ a deux diviseurs, ils correspondent à une décomposition de β en somme des éléments simples β_1^+ , de sous-espace caractéristique W_1^+ de dimension 1 et β_2^+ , de sous-espace caractéristique W_2^+ de dimension 2 ; β_2^+ ne peut pas être nul. Si β_1^+ est nul, alors β_2^+ est de trace nulle, donc minimal dans l'extension quadratique qu'il engendre, et dans la décomposition correspondante de W^- , β_2^- est conjugué à β_2^+ . Alors la strate

$$[\Lambda_{W^+} \oplus \Lambda_{W^-}, n, n-1, \beta_{W^+} + \beta_{W^-}]$$

est semi-simple, somme d'une strate nulle en dimension 2 et d'une strate simple en dimension 4, attachée à β_2^+ .

Si β_1^+ est non nul, alors $\beta_{W^+} + \beta_{W^-}$ a quatre sous-espaces caractéristiques distincts. Les polynômes caractéristiques des strates attachées à β_1^+ et $\beta_1^- = -\beta_1^+$ sont premiers entre eux, et de même pour celles attachées à β_2^+ et β_2^- , conjugué de $-\beta_2^+$, donc un défaut de semi-simplicité de la strate $[\Lambda_{W^+} \oplus \Lambda_{W^-}, n, r, \beta_{W^+} + \beta_{W^-}]$ ne pourrait provenir que d'une somme "mixte" $\beta_1^+ + \beta_2^-$ (ou $\beta_1^- + \beta_2^+$ ce qui revient au même). Soient $-n_1$ et $-n_2$ les valuations de β_1^+ et β_2^+ par rapport aux suites de réseaux $\Lambda \cap W_1^+$ et $\Lambda \cap W_2^+$ respectivement. Ces suites ont même période sur F donc $\text{tr}(\beta_2^+) = -\beta_1^+$ entraîne $-n_1 \geq -n_2$. Par semi-simplicité de la strate initiale on a $r < n_1$. Si donc la strate attachée à $\beta_1^+ + \beta_2^-$ était équivalente à une strate simple il s'agirait d'une strate scalaire attachée à un élément λ congru à β_1^+ d'une part, à $\frac{1}{2}\text{tr}(\beta_2^-) = \frac{1}{2}\beta_1^+$ d'autre part : c'est impossible.

- Si P^+ a trois diviseurs, ils correspondent à trois valeurs propres scalaires β_i^+ , $i = 1, 2, 3$, de somme nulle et sous-espaces propres W_i^+ . Si l'une est nulle, les deux autres sont opposées de sorte que les trois valeurs propres dans W^- , opposées des précédentes, sont globalement les mêmes : la strate somme sera semi-simple avec décomposition en trois sous-espaces propres, chacun de dimension 2.

Si aucune n'est nulle, soit $-n_i$ la valuation de β_i^+ par rapport à la suite de réseaux $\Lambda \cap W_i^+$; notons que ces suites ont même période sur F . A renumérotation près on peut supposer $-n_1 = -n_2 \leq -n_3$, de sorte que la strate initiale est semi-simple pour $0 \leq r < n_3$. Un défaut de semi-simplicité de la strate $[\Lambda_{W^+} \oplus \Lambda_{W^-}, n, r, \beta_{W^+} + \beta_{W^-}]$ ne

peut provenir que d'une somme $\beta_i^+ + (-\beta_j^+)$ avec $i \neq j$ donnant une strate équivalente à une strate simple. C'est alors forcément une strate scalaire attachée à un élément λ congru à β_i^+ et à $-\beta_j^+$. Les valuations de ces deux éléments sont alors égales et la somme $\beta_i^+ + \beta_j^+$ est congrue à 0, il ne peut donc s'agir que de $\{i, j\} = \{1, 2\}$ et on a $n_3 < n_1$. Ecrivons $\beta_2^+ = -\beta_1^+ - \beta_3^+$: la congruence à λ ne peut avoir lieu que pour $r \geq n_3$, c'est donc impossible.

Reste à voir que toute strate semi-simple non nulle de $\mathfrak{g}_2(F)$ s'obtient ainsi. Pour une strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ telle que le noyau de β est de dimension 2, c'est déjà clair. Examinons les cas où le noyau V^0 de β est de dimension 4, c'est-à-dire les cas (iii) et (iv). Notons W l'orthogonal de V^0 et rappelons que β_W^2 opère par un scalaire u . Notons enfin α la norme d'algèbre autoduale correspondant à la suite de réseaux Λ , α_0 et α_W ses restrictions à V^0 et W respectivement.

- Si V^0 est isotrope et si u est le carré de $\lambda \in F^\times$, les sous-espaces propres W_λ et $W_{-\lambda}$ de β_W forment une polarisation complète de W qui scinde $\Lambda \cap W$. Soit $W_\lambda = Fh \oplus Fk$ un scindage de $\Lambda \cap W_\lambda$ et soit (h', k') la base duale de $W_{-\lambda}$. D'après le lemme 1.5 on a $\beta(h - h') = c(h - h')$ avec $c = \lambda c(Fh, Fh')$ et d'après la démonstration de la proposition 1.16 (ii), la norme α est scindée par $V = F[c] \perp F[c]^\perp$, c.q.f.d.
- Si V^0 est isotrope et si u n'est pas un carré de F , soit (h, h') une base de Witt de W sur $F[\beta_W]$ scindant α_W . Elle détermine $d = c(Fh, Fh') \in V^0$ (lemme 1.5) et la démonstration de 1.16 (ii) montre que α est scindée par $V = F[d] \perp F[d]^\perp$. D'autre part β , qui commute à la multiplication à gauche par V^0 , est $F[d]$ -linéaire, il conserve $e^+(Fh, Fh')F[d]^\perp$ et $e^-(Fh, Fh')F[d]^\perp$. La strate est donc aussi une strate de type $F[d]$.
- Si V^0 est anisotrope, soit D une sous-extension quadratique de F dans V^0 non isomorphe à $F[\beta_W]$ et soit $a \in W$ de norme 1. L'application $x \mapsto xa$ est une isométrie de V^0 sur W telle que $\alpha_0(x) = \alpha_W(xa)$, ces normes sont donc scindées respectivement par $V^0 = D \perp D^\perp \cap V^0$ et $W = Da \perp (D^\perp \cap V^0)a$ (proposition 1.16 (i)). La strate $[\Lambda_W, n, r, \beta_W]$ est aussi bien une strate simple dans $\mathfrak{su}(W, D/F)$. On prolonge β_W par 0 sur $D^\perp \cap V^0$ d'où une strate semi-simple de $\mathfrak{su}(W \perp D^\perp \cap V^0, D/F)$ dont l'image par le procédé (ii) de la proposition est exactement notre strate de départ.

■

Le procédé ci-dessus est compatible à l'équivalence des strates, donc à l'approximation, dont il nous faut dire un mot. Dans le premier cas, on sait par [18, Proposition 3.4] qu'il existe une strate semi-simple $[\Lambda_{W^+}, n, r+1, \gamma_{W^+}]$ dans $\mathfrak{gl}(W^+)$ équivalente à la strate $[\Lambda_{W^+}, n, r+1, \beta_{W^+}]$ et telle que la décomposition de W^+ associée à γ_{W^+} s'obtienne à partir de celle associée à β_{W^+} par regroupement éventuel de blocs. Puisque $\beta_{W^+} - \gamma_{W^+}$ est un élément de $\mathfrak{A}_{-(r+1)}(\Lambda)$ et que β_{W^+} est de trace nulle, l'élément $\text{tr}(\gamma_{W^+})I$ appartient aussi à $\mathfrak{A}_{-(r+1)}(\Lambda)$ (cf. [6,

Proposition 2.9]) donc on peut remplacer γ_{W^+} par $\gamma_{W^+} - \frac{1}{3}\text{tr}(\gamma_{W^+})$ qui appartient à $\mathfrak{sl}(3, F)$, d'où l'existence d'une strate équivalente dans $\mathfrak{sl}(W^+)$.

Dans le second cas on trouve de même un γ_W dans $\mathfrak{u}(W)$ via [18, §3.6] puis on le remplace par $\gamma_W - \frac{1}{3}\text{tr}(\gamma_W)$ qui appartient à $\mathfrak{su}(W)$, d'où l'existence d'une strate équivalente dans $\mathfrak{su}(W)$.

Ces remarques, en complément du théorème, assurent que :

Corollaire 1.24. *Le processus d'approximation des strates peut rester interne aux strates semi-simples de $\mathfrak{g}_2(F)$: soit D une sous-algèbre de composition de dimension 2 de V et soit $[\Lambda, n, r, \beta]$, $0 \leq r < n$, une strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$ de type D . La strate $[\Lambda, n, r + 1, \beta]$ est équivalente à une strate semi-simple $[\Lambda, n, r + 1, \gamma]$ de $\mathfrak{g}_2(F)$ de type D .*

Remarque 1.25. Lorsque V^0 est de dimension 4 et déployée nous venons de montrer que la strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ est toujours de type D pour une sous-algèbre de composition D hyperbolique de dimension 2 convenable. Elle pourrait aussi être de type D' pour une extension quadratique D' convenable. De toutes façons, pour une strate telle que V^0 soit de dimension 4, le procédé ci-dessus n'est pas canonique et ne nous dispensera pas d'un traitement particulier, notamment pour l'étude du centralisateur de β . La différence de nature entre les quatre types de strates ci-dessus apparaît d'ailleurs clairement dans la démonstration du théorème 2.18.

2 Trialité et caractères semi-simples de $\text{SO}_F(V)$

Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$ au sens du paragraphe 1.2. Nous voulons lui associer une famille de caractères semi-simples dans le groupe $G_2(F)$, obtenus à l'aide de l'action de la trialité sur une famille de caractères semi-simples dans le groupe $\text{SO}_F(V)$. Ceci nécessite une étude précise de la trialité afin d'en spécifier l'action sur les objets relatifs à la strate dans le groupe $\text{SO}_F(V)$: les sous-groupes ouverts compacts $P^i(\Lambda)$, $H^i(\beta, \Lambda)$, $J^i(\beta, \Lambda)$ ($i \geq 1$) et les caractères semi-simples de $H^1(\beta, \Lambda)$.

2.1 La trialité et le groupe $\text{Spin}_F(V)$

La référence pour ce paragraphe est [15, §3]. Rappelons pour mémoire que la *norme spinorielle* est l'homomorphisme de $\text{SO}_F(V)$ dans $F^\times / (F^\times)^2$ qui à une réflexion orthogonale définie par un élément non isotrope a de V associe la classe de $Q(a)$. On notera $O'_F(V) := G'$ son noyau, le *groupe orthogonal réduit*. Commençons par la définition de la trialité :

Définition 2.1. *Soit t_1 un élément de $\text{SO}_F(V)$. Il existe t_2 et t_3 dans $\text{SO}_F(V)$ vérifiant*

$$t_1(xy) = t_2(x)t_3(y) \quad \text{pour tous } x, y \in V \quad (2.2)$$

si et seulement si la norme spinorielle de t_1 est triviale ; dans ce cas t_2 et t_3 appartiennent eux aussi à $O'_F(V)$. On appelle triplet relié tout triplet (t_1, t_2, t_3) d'éléments de $SO_F(V)$ vérifiant (2.2). Ce sont alors des éléments de $O'_F(V)$.

Soit $\text{Spin}_F(V)$ le groupe des points sur F du groupe algébrique $\mathbf{Spin}(V)$, défini sur F (le revêtement simplement connexe de $\mathbf{SO}(V)$). Dans le cas de l'algèbre d'octonions la trialité fournit le modèle de $\text{Spin}_F(V)$, en termes de triplets reliés, que nous utiliserons :

$$\text{Spin}_F(V) = \{(t_1, t_2, t_3) \in SO_F(V)^3 / \forall x, y \in V \ t_1(xy) = t_2(x)t_3(y)\}$$

et l'application π de première projection fournit la suite exacte fondamentale [15, §3.6 et 3.7]

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \text{Spin}_F(V) \xrightarrow{\pi} O'_F(V) \longrightarrow 1 \quad (2.3)$$

Pour tout t appartenant à $SO_F(V)$ on définit $\hat{t} \in SO_F(V)$ par $\hat{t}(x) = \overline{t(\bar{x})}$ ($x \in V$). Alors $t \mapsto \hat{t}$ est un automorphisme involutif de $SO_F(V)$ et si (t_1, t_2, t_3) est un triplet relié, les triplets

$$(t_2, t_1, \hat{t}_3), (t_3, \hat{t}_2, t_1), (\hat{t}_1, \hat{t}_3, \hat{t}_2), (\hat{t}_2, t_3, \hat{t}_1), (\hat{t}_3, \hat{t}_1, t_2) \quad (2.4)$$

sont eux aussi des triplets reliés. On définit le groupe Γ des *automorphismes de trialité* comme le groupe d'automorphismes de $\text{Spin}_F(V)$ engendré par $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (\hat{t}_2, t_3, \hat{t}_1)$, d'ordre 3, et $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_2, t_1, \hat{t}_3)$, d'ordre 2. Il est isomorphe à \mathfrak{S}_3 et son groupe de points fixes est isomorphe à $G_2(F)$ via la projection π :

$$1 \longrightarrow \text{Spin}_F(V)^\Gamma \xrightarrow{\pi} G_2(F) \longrightarrow 1$$

Puisque p est impair, les groupes $SO_F(V)$ et $O'_F(V)$ ont les mêmes pro- p -sous-groupes et d'après [20, Théorème 9.7.3], l'extension (2.3) est scindée au-dessus de tout pro- p -sous-groupe H , et ceci de façon unique : l'image de l'unique section homomorphe s_H de H dans $\pi^{-1}(H)$ est le pro- p -Sylow de $\pi^{-1}(H)$, qui est distingué et d'indice 2 dans $\pi^{-1}(H)$. Ainsi, si $\pi^{-1}(H)$ est stable par les automorphismes de trialité, il en est de même de $s_H(H)$ et on peut considérer Γ comme un groupe d'automorphismes de H , engendré par $t_1 \mapsto t_2$ et $t_1 \mapsto \hat{t}_2$ par exemple, où (t_1, t_2, t_3) est un triplet relié d'éléments de H . C'est sous cette forme que la trialité apparaît le plus souvent dans la suite.

Par dérivation on obtient un groupe $\mathbf{\Gamma}$ d'automorphismes de l'algèbre de Lie de $\text{Spin}_F(V)$, isomorphe à $\mathfrak{so}_F(V)$, qui peut de même être défini à partir de la notion de *triplets reliés*. Pour tout élément t_1 de $\mathfrak{so}_F(V)$, il existe $t_2, t_3 \in \mathfrak{so}_F(V)$, uniques, tels que :

$$t_1(xy) = t_2(x)y + xt_3(y) \quad \text{pour tous } x, y \in V. \quad (2.5)$$

Le triplet (t_1, t_2, t_3) d'éléments de $\mathfrak{so}_F(V)$ est alors dit *relié*, et les triplets de la liste 2.4 le sont aussi. Les automorphismes de trialité sont les automorphismes de la forme $t_1 \mapsto t_i$ ou \hat{t}_i , $i = 1, 2, 3$, où (t_1, t_2, t_3) est un triplet relié. Leur action a pour points fixes les dérivations de V , c'est-à-dire l'algèbre de Lie de $G_2(F)$: $\mathfrak{g}_2(F) = \mathfrak{so}_F(V)^\Gamma$.

Dans la suite, l'expression “fixe par trialité” signifie “fixe par Γ ou $\mathbf{\Gamma}$ ”.

2.2 Trialité et base de Witt

Nous partons du modèle de l'algèbre d'octonions reproduit dans [8, §5]. Il comporte un espace vectoriel W^+ de dimension 3 sur F , muni d'une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ et son dual W^- muni de la base $\{e_{-1}, e_{-2}, e_{-3}\}$ déterminée par $e_{-i}(e_j) = -\delta_{ij}$. On identifie $\wedge^3 W^+$ à F en convenant de $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = 1$, d'où des identifications $\wedge^2 W^+ \simeq W^-$ et $(\wedge^2 W^+)^* \simeq W^+$. L'isomorphisme de $\wedge^2 W^-$ sur $(\wedge^2 W^+)^*$ donné par

$$(\phi_1 \wedge \phi_2, w_1 \wedge w_2) \mapsto \phi_1(w_1)\phi_2(w_2) - \phi_1(w_2)\phi_2(w_1)$$

fournit enfin un isomorphisme de $\wedge^2 W^-$ sur W^+ . Avec ces conventions, l'algèbre V peut être décrite comme l'espace des matrices

$$\begin{pmatrix} a & w \\ \phi & b \end{pmatrix} \quad a, b \in F, \quad w \in W^+, \quad \phi \in W^-,$$

muni du produit

$$\begin{pmatrix} a & w \\ \phi & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & w' \\ \phi' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \phi'(w) & aw' + b'w - \phi \wedge \phi' \\ a'\phi + b\phi' + w \wedge w' & bb' + \phi(w') \end{pmatrix}.$$

Ce modèle est particulièrement adapté à l'étude de la trialité sur les automorphismes stabilisant W^+ et W^- . Il est facile de vérifier que pour une isométrie t_1 de la forme :

$$\iota(u, g) \left(\begin{pmatrix} a & w \\ \phi & b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u^{-1}a & gw \\ \phi g^{-1} & ub \end{pmatrix} \quad u \in F^\times, \quad g \in \mathrm{GL}_F(W^+),$$

l'équation (2.2) a une solution si et seulement si $u \det g$ est un carré, la solution étant donnée, pour un choix de $\lambda \in F^\times$ tel que $\lambda^2 = u \det g$, par :

$$t_2 = \iota(\lambda^{-1}u, \lambda^{-1}g), \quad t_3 = \iota(\lambda, u\lambda^{-1}g). \quad (2.6)$$

Bien entendu on retrouve le fait que les rotations stabilisant W^+ et W^- et fixées par trialité forment un groupe canoniquement isomorphe à $\mathrm{SL}_F(W^+)$ (§1.3).

Il s'agit maintenant de choisir une base de V permettant de calculer la trialité sur les sous-groupes radiciels standard. En posant $e_{-4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient une base de Witt $\{e_i\}$ de V . Pour $\lambda \in F$ et $i, j \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$ avec $i \neq \pm j$, on pose

$$u_{i,j}(\lambda)(e_i) = e_i + \lambda e_{-j}, \quad u_{i,j}(\lambda)(e_j) = e_j - \lambda e_{-i}, \quad u_{i,j}(\lambda)(e_k) = e_k \quad \text{pour } k \neq i, j.$$

Lemme 2.7. *Si i et j sont de signe opposé et distincts de ± 4 , $u_{i,j}(\lambda)$ est fixé par trialité. Sinon, notant (i, i^+, i^{++}) l'un des triplets $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, les triplets suivants sont reliés :*

$$(u_{-i, -i^{++}}(\lambda), u_{4, i^+}(\lambda), u_{i^+, -4}(\lambda)) \quad \text{et} \quad (u_{i, i^{++}}(\lambda), u_{-4, -i^+}(\lambda), u_{-i^+, 4}(\lambda)).$$

Il en est de même dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_F(V)$ en remplaçant $u_{i,j}(\lambda)$ par $U_{i,j}(\lambda) = u_{i,j}(\lambda) - I$.

Démonstration. Si i et j sont distincts de ± 4 , $u_{i,j}(\lambda)$ appartient à $\mathrm{SL}_F(W^+)$. La suite est sans doute bien connue ([8, §6] par exemple), cependant nous préférons inclure une version précise. Il suffit de vérifier que pour tous k, l on a $t_1(e_k e_l) = t_2(e_k) t_3(e_l)$. On s'appuie sur la table de multiplication de l'algèbre qui est donnée comme suit, avec (i, i^+, i^{++}) comme ci-dessus et j un entier dans $\{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} e_i e_i &= e_{-i} e_{-i} = 0 & e_i e_{i^+} &= -e_{i^+} e_i = e_{-i^{++}} & e_{-i} e_{-i^+} &= -e_{-i^+} e_{-i} = e_{i^{++}} \\ e_{-j} e_i &= -\delta_{ij} e_4 & e_j e_{-i} &= -\delta_{ij} e_{-4} & e_{-4} e_{-4} &= e_{-4} & e_4 e_4 &= e_4 & e_{-4} e_4 &= e_4 e_{-4} = 0 \\ e_{-4} e_i &= e_i e_4 = e_i & e_{-4} e_{-i} &= e_{-i} e_4 = 0 & e_{-i} e_{-4} &= e_4 e_{-i} = e_{-i} & e_i e_{-4} &= e_4 e_i = 0 \end{aligned}$$

En particulier, un produit $e_{-i^+} e_j$, avec $j \neq i^+$ et $j \neq -4$, est non nul si et seulement si $j = -i$ ou $j = -i^{++}$, point essentiel du calcul. \blacksquare

Pour $\lambda \in F^\times$ et $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, soit $d_i(\lambda)$ l'élément de $\mathrm{SO}_F(V)$ envoyant e_i sur λe_i , e_{-i} sur $\lambda^{-1} e_{-i}$ et fixant les autres vecteurs de base. La trialité sur ces éléments est un cas particulier de (2.6). On définit de même $D_i(t) \in \mathfrak{so}_F(V)$ par $D_i(t)(e_i) = t e_i$, $D_i(t)(e_{-i}) = -t e_{-i}$ et $D_i(t)(e_j) = 0$ pour $j \neq \pm i$ ($t \in F$). On inclut par commodité le calcul suivant :

Lemme 2.8. *Les triplets d'éléments de $\mathfrak{so}_F(V)$ suivants sont reliés ($i = 1, 2, 3$) :*

$$\begin{aligned} & (D_i(t), D_i(t/2) + \sum_{\substack{j \in \{1,2,3,4\} \\ j \neq i}} D_j(-t/2), D_4(t/2) + D_i(t/2) + \sum_{\substack{j \in \{1,2,3,4\} \\ j \neq i,4}} D_j(-t/2)), \\ & (D_4(t), D_4(t/2) + \sum_{j \in \{1,2,3\}} D_j(-t/2), \sum_{j \in \{1,2,3,4\}} D_j(t/2)). \end{aligned}$$

2.3 Trialité et transformation de Cayley

Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple de \mathfrak{g}_2 . L'algèbre $\mathrm{End}_F(V)$ admet une filtration par les réseaux $\mathfrak{A}_i(\Lambda) = \{g \in \mathrm{End}_F(V) / \forall k \in \mathbb{Z} \ g\Lambda(k) \subseteq \Lambda(k+i)\}$ ($i \in \mathbb{Z}$), et le sous-groupe ouvert compact $\tilde{P}(\Lambda) = \{g \in \mathrm{GL}_F(V) / \forall k \in \mathbb{Z} \ g\Lambda(k) = \Lambda(k)\}$ admet une filtration par les pro- p -sous-groupes

$$\tilde{P}^i(\Lambda) = \{g \in \mathrm{GL}_F(V) / \forall k \in \mathbb{Z} \ (g-1)\Lambda(k) \subseteq \Lambda(k+i)\} \quad (i \geq 1).$$

De même l'algèbre $\mathfrak{so}_F(V)$ admet une filtration par les réseaux $\mathfrak{A}_i(\Lambda) = \tilde{\mathfrak{A}}_i(\Lambda) \cap \mathfrak{so}_F(V)$ et le sous-groupe ouvert compact $P(\Lambda) = \tilde{P}(\Lambda) \cap \mathrm{O}_F(V)$ admet une filtration par les pro- p -sous-groupes $P^i(\Lambda) = \tilde{P}^i(\Lambda) \cap \mathrm{O}_F(V)$, contenus dans $\mathrm{O}'_F(V)$.

D'après [8, §11 et Corollaire 11.14], le groupe Γ agit par trialité sur l'immeuble de $\mathrm{Spin}_F(V)$ de façon compatible à son action sur $\mathrm{Spin}_F(V)$ et l'immeuble de $G_2(F)$ s'identifie à l'ensemble des points de l'immeuble de $\mathrm{Spin}_F(V)$ qui sont fixés par Γ . Le sous-groupe $\pi^{-1}(P'(\Lambda))$ de

$\text{Spin}_F(V)$, fixateur du point attaché à Λ dans l'immeuble de $\text{Spin}_F(V)$, est donc, comme ce point, stable par trialité. Notons s l'unique section homomorphe de $P^1(\Lambda)$ dans $\text{Spin}_F(V)$. Alors $s(P^1(\Lambda))$, plus grand pro- p -sous-groupe distingué de $\pi^{-1}(P'(\Lambda))$, est stable par trialité et l'unicité de s permet de définir de manière unique l'action de la trialité sur $P^1(\Lambda)$ (§2.1). Le but de ce paragraphe est de montrer que les sous-groupes $P^i(\Lambda)$ ($i \geq 1$) sont eux aussi stables par trialité et que les groupes de points fixes obtenus ont les propriétés espérées (Proposition 2.10).

La suite de réseaux Λ est scindée par une base de Witt comme ci-dessus [8, Proposition 8.1]. Elle est associée à une norme d'algèbre autoduale α sur V et à sa fonction de réseau λ_α , et il existe un entier m tel que l'on ait pour tout $i \in \mathbb{Z}$: $\Lambda(i) = \lambda_\alpha(\frac{i}{m})$ (§1.6). Notons $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal au nombre réel x . D'après [10, Lemma 3.2] les réseaux $\mathfrak{A}_k(\Lambda)$ sont alors donnés par

$$\mathfrak{A}_k(\Lambda) = \bigoplus_{i=1}^4 D_i \left(\mathfrak{p}_F^{\lceil \frac{k}{m} \rceil} \right) \oplus \bigoplus_{\substack{i,j \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\} \\ i \neq \pm j}} U_{i,j} \left(\mathfrak{p}_F^{\lceil \frac{k}{m} + \alpha(e_i) + \alpha(e_j) \rceil} \right)$$

Leur partie diagonale est stable par trialité par le lemme 2.8, puisque les D_i portent tous la même valuation. Certaines parties $U_{i,j}$ sont fixées individuellement par la trialité ; les autres doivent être regroupées trois par trois comme dans le lemme 2.7 et la stabilité par trialité équivaut à montrer, dans les notations de ce lemme, que

$$\begin{aligned} \alpha(e_{-i}) + \alpha(e_{-i++}) &= \alpha(e_4) + \alpha(e_{i+}) = \alpha(e_{i+}) + \alpha(e_{-4}) \\ \text{et } \alpha(e_i) + \alpha(e_{i++}) &= \alpha(e_{-4}) + \alpha(e_{-i+}) = \alpha(e_{-i+}) + \alpha(e_4). \end{aligned}$$

Or ceci découle du lemme 1.12 et de la proposition 1.14 qui nous assurent que $\alpha(e_4) = \alpha(e_{-4}) = 0$, $\alpha(e_1) + \alpha(e_2) + \alpha(e_3) = 0$ et $\alpha(e_i) + \alpha(e_{-i}) = 0$.

Pour $k \geq 1$ la transformation de Cayley $X \mapsto C(X) = (1 + \frac{X}{2})(1 - \frac{X}{2})^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{A}_k(\Lambda)$ sur $P^k(\Lambda)$ [11, 2.13]. D'autre part $P^k(\Lambda)$ a une décomposition d'Iwahori par rapport au tore diagonal et au sous-groupe de Borel standard dans la base de Witt donnée, il est donc engendré par ses intersections avec les sous-groupes $d_i(F^\times)$ et $u_{i,j}(F)$. Enfin, on a

$$C(D_i(\lambda)) = d_i(C(\lambda)) \quad (\lambda \in \mathfrak{p}_F) \quad \text{et} \quad C(U_{i,j}(\lambda)) = u_{i,j}(\lambda) \quad (\lambda \in F). \quad (2.9)$$

Le groupe $P^k(\Lambda)$ est donc stable par trialité, puisqu'il possède une famille de générateurs stable par trialité : les $d_i \left(1 + \mathfrak{p}_F^{\lceil \frac{k}{m} \rceil} \right)$ et les $U_{i,j} \left(\mathfrak{p}_F^{\lceil \frac{k}{m} + \alpha(e_i) + \alpha(e_j) \rceil} \right)$. Nous venons de montrer la première assertion de la proposition suivante, qui est au groupe $G_2(F)$ ce que les lemmes 3.1 et 3.2 de [16] sont aux groupes classiques :

Proposition 2.10. *Soient r et s des entiers tels que $1 \leq r \leq s \leq 2r$.*

- (i) $\mathfrak{A}_r(\Lambda)$ et $P^r(\Lambda)$ sont stables par trialité.

- (ii) L'isomorphisme de groupes abéliens : $\mathfrak{A}_r(\Lambda)/\mathfrak{A}_s(\Lambda) \xrightarrow{\simeq} P^r(\Lambda)/P^s(\Lambda)$ induit par la bijection de Cayley commute à la trialité. Il induit un isomorphisme de groupes abéliens

$$\mathfrak{A}_r(\Lambda)^\Gamma/\mathfrak{A}_s(\Lambda)^\Gamma \xrightarrow{\simeq} P^r(\Lambda)^\Gamma/P^s(\Lambda)^\Gamma.$$

- (iii) Soit ψ un caractère additif de F de conducteur \mathfrak{p}_F . L'isomorphisme $P(\Lambda)$ -équivariant de groupes abéliens

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{1-s}(\Lambda)/\mathfrak{A}_{1-r}(\Lambda) &\xrightarrow{\simeq} (P^r(\Lambda)/P^s(\Lambda))^\wedge \\ b + \mathfrak{A}_{1-r}(\Lambda) &\longmapsto \psi_b \quad (\psi_b(x) = \psi \circ \text{tr}(b(x-1))) \end{aligned}$$

commute à la trialité : $\psi_{d\nu(b)}(x) = \psi_b(\nu^{-1}(x))$ pour tout $\nu \in \Gamma$ de différentielle $d\nu \in \Gamma$.

Démonstration. (ii) Le transformé de Cayley de $x \in \mathfrak{A}_r(\Lambda)$ est congru à $1+x$ modulo $P^s(\Lambda)$, l'isomorphisme considéré est bien celui de [11, 2.13] et [16, Lemma 3.1] ; en particulier la bijection de Cayley devient un morphisme par passage au quotient. Soit ν une application de trialité sur $P^1(\Lambda)$ et $d\nu$ sa différentielle. Pour établir que $C(d\nu(x))$ est congru à $\nu(C(x))$ modulo $P^s(\Lambda)$ pour tout $x \in \mathfrak{A}_r(\Lambda)$, il suffit de le montrer sur des générateurs, ce qui est immédiat par (2.9) et les lemmes 2.7 et 2.8.

On obtient alors un isomorphisme entre les groupes de points fixes des quotients sous Γ et Γ respectivement. Il reste à voir que $\mathfrak{A}_r(\Lambda)^\Gamma/\mathfrak{A}_s(\Lambda)^\Gamma \simeq [\mathfrak{A}_r(\Lambda)/\mathfrak{A}_s(\Lambda)]^\Gamma$ (et de même du côté droit), c'est-à-dire que les points fixes du quotient peuvent se relever dans $\mathfrak{A}_r(\Lambda)^\Gamma$. Il suffit encore une fois d'écrire le groupe commutatif $\mathfrak{A}_r(\Lambda)/\mathfrak{A}_s(\Lambda)$ comme somme directe de sous-groupes fixes ou stables par trialité (la partie diagonale, les parties en $U_{i,j}$ fixes, et les sommes de trois parties en $U_{i,j}$ liées par trialité).

- (iii) L'isomorphisme en question est celui de [16, Lemma 3.2 (ii)] et le groupe $(P^r(\Lambda)/P^s(\Lambda))^\wedge$ est le dual de Pontrjagin de $(P^r(\Lambda)/P^s(\Lambda))$; l'action naturelle de Γ sur un élément ψ de ce dual est bien donnée par $\nu.\psi = \psi \circ \nu^{-1}$.

Rappelons que pour tous $X, Y \in \mathfrak{so}_F(V)$ et pour tout $d\nu \in \Gamma$ on a $\text{tr } XY = \text{tr } d\nu(X)d\nu(Y)$, où la trace est prise dans $\text{End}_F(V)$. (Ces deux formes bilinéaires non dégénérées sur $\mathfrak{so}_F(V)$ déterminent chacune un isomorphisme de $\mathfrak{so}_F(V)$ -modules entre la représentation adjointe et la représentation coadjointe de $\mathfrak{so}_F(V)$, algèbre de Lie simple : elles sont donc proportionnelles, or elles coïncident sur $\mathfrak{g}_2(F)$.) On calcule alors, pour $x \in P^r(\Lambda)$:

$$\begin{aligned} \psi_{d\nu(b)}(x) &= \psi \circ \text{tr}(d\nu(b)(x-1)) = \psi \circ \text{tr}(bd\nu^{-1}(x-1)) \\ &= \psi \circ \text{tr}(bd\nu^{-1}(C^{-1}(x))) \\ &= \psi \circ \text{tr}(bC^{-1}(\nu^{-1}(x))) \\ &= \psi \circ \text{tr}(b(\nu^{-1}(x)-1)) = \psi_b(\nu^{-1}(x)). \end{aligned}$$

■

Remarque 2.11. Considérons un élément X de $\mathfrak{sl}_F(W^+) \subset \mathfrak{g}_2(F)$ tel que $X(e_i) = u_i e_i$ pour $i = 1, 2, 3$ avec $u_i \in F$, $v_F(u_i) \geq 1$, et $u_1 + u_2 + u_3 = 0$. Sa transformée de Cayley $C(X)$ appartient à $GL_F(W^+)$ canoniquement identifié à un sous-groupe de $SO_F(V)$. Ainsi $C(X)$ appartient à $G_2(F)$ si et seulement si sa restriction à W^+ est de déterminant 1. Or il est facile de voir que $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ n'entraîne pas $C(u_1)C(u_2)C(u_3) = 1$ (prendre par exemple $u_1 = u_2 = u$, $u_3 = -2u$).

La transformée de Cayley n'applique donc pas l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2(F)$ dans le groupe $G_2(F)$. C'est la raison pour laquelle nous ne pouvons pas invoquer le travail antérieur de Moy (*Minimal K -types for G_2 over a p -adic field*, Trans. A.M.S. 305(2) (1988), 517–529), basé sur l'assertion contraire. La proposition 2.10 requiert une démonstration.

2.4 Caractères semi-simples autoduaux

Poursuivons avec notre strate semi-simple $[\Lambda, n, 0, \beta]$, ou plutôt, provisoirement, avec une strate semi-simple $[\Lambda, n, r, \beta]$ de $\mathfrak{so}_F(V)$. Ce paragraphe est de fait valide dans le cadre général d'un groupe classique, c'est-à-dire celui de [19] : c'est une conséquence immédiate des constructions faites dans *loc.cit.* pour une strate semi-simple gauche et adaptées dans [7, §8.2] au cas d'une strate semi-simple autoduale. Dans un souci de simplicité, on se contente de l'énoncer dans le contexte et les notations déjà définis.

Rappelons la décomposition de V associée à β (1.1) :

$$V = [\perp_{i=0}^s V^i] \perp [\perp_{j=1}^k (V^{s+2j-1} \oplus V^{s+2j})]$$

où chaque V^i pour $i \leq s$, ou $V^{s+2j-1} \oplus V^{s+2j}$ pour $1 \leq j \leq k$, est non dégénéré et orthogonal à tous les autres, et V^{s+2j-1}, V^{s+2j} sont totalement isotropes en dualité. Pour tout $g \in GL_F(V^{s+2j-1})$ on notera $\iota_j(g)$ l'unique élément de $SO_F(V)$ prolongeant g et agissant trivialement sur V^a pour tout a distinct de $s+2j-1$ et $s+2j$. Ceci définit une injection canonique

$$\iota_j : GL_F(V^{s+2j-1}) \hookrightarrow SO_F(V).$$

Les sous-groupes ouverts compacts $\tilde{H}^i(\beta, \Lambda)$, $\tilde{J}^i(\beta, \Lambda)$ ($i \geq 1$) et $\tilde{J}(\beta, \Lambda)$ de $GL_F(V)$ attachés à la strate sont définis dans [18, §3.2] (après la définition moins générale de [6, §3.6]). Ces sous-groupes sont invariants par l'automorphisme τ de points fixes $O_F(V)$ [18, §3.6] [7, §8.2]. Notons $H^i(\beta, \Lambda) = \tilde{H}^i(\beta, \Lambda)^\tau$, $J^i(\beta, \Lambda) = \tilde{J}^i(\beta, \Lambda)^\tau$ ($i \geq 1$) : ce sont des sous-groupes ouverts compacts de $O'_F(V)$.

Lemme 2.12. [18, Corollary 3.12] *Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$ une strate semi-simple autoduale. Il existe une strate semi-simple autoduale $[\Lambda, n, r+1, \gamma]$ équivalente à $[\Lambda, n, r+1, \beta]$ et respectant*

la décomposition initiale (1.1) de V . On a alors :

$$\begin{aligned} H^i(\beta, \Lambda) &= H^i(\gamma, \Lambda) \text{ pour } i > \frac{r+1}{2}, & J^i(\beta, \Lambda) &= J^i(\gamma, \Lambda) \text{ pour } i \geq \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil, \\ H^i(\beta, \Lambda) &= (P^i(\Lambda) \cap G_\beta) H^{\lceil \frac{r+1}{2} \rceil + 1}(\gamma, \Lambda) & \text{ pour } 1 \leq i \leq \frac{r+1}{2}, \\ J^i(\beta, \Lambda) &= (P^i(\Lambda) \cap G_\beta) J^{\lceil \frac{r+1}{2} \rceil}(\gamma, \Lambda) & \text{ pour } 1 \leq i \leq \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

Démonstration. L'énoncé analogue pour les groupes $\tilde{H}^i(\beta, \Lambda)$ et $\tilde{J}^i(\beta, \Lambda)$ est précisément [18, Corollary 3.12] dont les deux premières égalités découlent. Pour les suivantes il ne s'agit que de vérifier que l'on peut prendre les points fixes de l'involution τ terme à terme dans le produit. Le raisonnement est devenu classique : posons $H = \tilde{P}^i(\Lambda) \cap \tilde{G}_\beta$ et $U = \tilde{H}^{\lceil \frac{r+1}{2} \rceil + 1}(\gamma, \Lambda)$. Alors H normalise $U = \tilde{H}^{\lceil \frac{r+1}{2} \rceil + 1}(\beta, \Lambda)$ donc pour tout $h \in H$ on a $UhU \cap H = (U \cap H)h$. Il reste à appliquer [16, Theorem 2.3] : $(UH)^\tau = U^\tau H^\tau$. ■

Pour $0 \leq m < r$, notons $\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda, m, \beta)$ l'ensemble des caractères semi-simples de $\tilde{H}^{m+1}(\beta, \Lambda)$ [18, Definition 3.13]. Il est stable par l'involution τ [7, §8.2], ce qui permet de définir l'ensemble $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ des caractères semi-simples autoduaux de $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$ exactement comme dans le cas semi-simple gauche [18, §3.6] : c'est l'image par la correspondance de Glauberman de l'ensemble $\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda, m, \beta)^\tau$ des caractères semi-simples τ -invariants de $\tilde{H}^{m+1}(\beta, \Lambda)$. L'usage de la correspondance de Glauberman permet d'affirmer que la restriction à $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$ détermine une bijection :

$$\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda, m, \beta)^\tau \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta).$$

Puisque l'action de τ conserve $\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda, m, \beta)$, l'ensemble $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ est aussi l'ensemble des restrictions des caractères semi-simples de $\tilde{H}^{m+1}(\beta, \Lambda)$, sans condition d'invariance. En effet, si $\tilde{\theta}$ appartient à $\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda, m, \beta)$, il en est de même de $\tilde{\theta}^\tau$; le produit $\tilde{\theta}\tilde{\theta}^\tau$ appartient à $\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda, m, 2\beta)$ et possède une unique "racine carrée", élément de $\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda, m, \beta)$ et ayant même restriction à $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$ que $\tilde{\theta}$. On a détaillé ce raisonnement parce qu'il n'est pas valide pour $G_2(F)$, on le verra plus loin. En attendant, le lemme ci-dessous, conséquence immédiate de [18, Definition 3.13], explicite dans le point (i)(b) la différence entre caractères semi-simples gauches et autoduaux :

Lemme 2.13. *Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$ une strate semi-simple autoduale dans $\mathfrak{so}_F(V)$. Il existe une strate semi-simple autoduale $[\Lambda, n, r+1, \gamma]$ équivalente à $[\Lambda, n, r+1, \beta]$ et respectant la décomposition initiale (1.1) de V . Soit m tel que $0 \leq m < r$. Un caractère semi-simple autodual θ de $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$ vérifie :*

(i) (a) Pour $i \leq s$ la restriction de θ à

$$H^{m+1}(\beta, \Lambda) \cap \mathrm{SO}_F(V^i) = H^{m+1}(\beta_i, \Lambda^i)$$

appartient à $\mathcal{C}(\Lambda^i, m, \beta^i)$;

(b) pour $1 \leq j \leq k$ la restriction de θ à

$$H^{m+1}(\beta, \Lambda) \cap \iota_j \left(\mathrm{GL}_F(V^{s+2j-1}) \right) = \iota_j \left(\tilde{H}^{m+1}(\beta^{s+2j-1}, \Lambda^{s+2j-1}) \right)$$

appartient à $\iota_j \left(\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda^{s+2j-1}, m, 2\beta^{s+2j-1}) \right)$.

- (ii) Si $m' = \max \{m, [(r+1)/2]\}$ la restriction de θ à $H^{m'+1}(\beta, \Lambda)$ est de la forme $\theta_0 \psi_{\beta-\gamma}$ pour un $\theta_0 \in \mathcal{C}(\Lambda, m', \gamma)$.

2.5 Trialité et sous-algèbres de composition

Le modèle de l'algèbre d'octonions utilisé au paragraphe 2.2 permet de décrire la trialité sur le stabilisateur dans G' de la décomposition $V = V^0 \perp (W^+ \oplus W^-)$, pour toute *sous-algèbre de composition hyperbolique de dimension 2 de V* (2.6). Nous voulons de la même façon obtenir une description de la trialité adaptée à chaque type de sous-algèbre de composition de V .

Commençons par une *sous-algèbre de composition V^0 de dimension 4* et orthogonal W . Choisissons un élément a de norme non nulle de W de sorte que $W = V^0 a$. Soient t_1, t_2, t_3 des éléments de $\mathrm{SO}_F(V)$ stabilisant V^0 ; on les écrit sous la forme (§1.3) :

$$t_i(x + ya) = \alpha_i u_i x u_i^{-1} + (\delta_i v_i y v_i^{-1}) a \quad (x, y \in V^0)$$

avec $i \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha_i, \delta_i \in (V^0)^1$, $u_i, v_i \in (V^0)^\times$. En utilisant la formule de doublement (1.2) pour développer l'équation de trialité (2.2) on constate que, à t_1 fixé, (2.2) a une solution en t_2, t_3 si et seulement si $Q(u_1/v_1)$ est un carré. Les deux solutions de (2.2) correspondent alors au choix d'une racine carrée ξ de $Q(u_1/v_1)$:

$$\begin{cases} t_2(x + ya) = \xi^{-1} \alpha_1 u_1 x v_1^{-1} + (\xi \delta_1 v_1 y u_1^{-1}) a, \\ t_3(x + ya) = \xi v_1 x u_1^{-1} + (\xi \delta_1 v_1 y u_1^{-1} \alpha_1^{-1}) a, \end{cases} \quad \xi^2 = Q(u_1/v_1). \quad (2.14)$$

Passons au cas d'une *sous-algèbre de composition V^0 de dimension 2 et anisotrope*. Son supplémentaire W est un espace vectoriel de dimension 3 sur V^0 opérant par multiplication à gauche, et la multiplication à gauche par les éléments de V^0 est V^0 -linéaire sur W (§1.3) : c'est cette structure d'espace vectoriel sur V^0 qui est utilisée dans la suite sauf mention expresse du contraire. Il faut commencer par établir une formule de produit adaptée à la décomposition $V = V^0 \perp W$.

Soit c un élément non nul et de trace nulle de V^0 , de sorte que $V^0 = F[c]$. Soit Φ_g l'unique forme V^0 -hermitienne à gauche (i.e. pour la structure d'espace vectoriel obtenue par produit

à gauche) sur V telle que $f = \text{tr}_{V^0/F} \circ \Phi_g$, et soit Φ_d son analogue à droite (i.e. pour la structure d'espace vectoriel obtenue par produit à droite sur V). Elles sont données par :

$$\Phi_g(x, y) = \frac{1}{2} (f(x, y) + c^{-1}f(cx, y)), \quad \Phi_d(x, y) = \frac{1}{2} (f(x, y) + c^{-1}f(xc, y)) \quad (x, y \in V).$$

Les deux formes coïncident sur V^0 ; pour $x, y \in W$ on a $xc = -cx$ et $\Phi_d(x, y) = \overline{\Phi_g(x, y)}$. De $f(xy, z) = f(y, \bar{x}z) = f(x, z\bar{y})$ ($x, y, z \in V$) on déduit aisément :

$$\Phi_g(ww', z) = -\Phi_d(w', wz) = -\Phi_d(w'\bar{z}, w) \quad \text{pour tous } w, w' \in W, z \in V.$$

Soient donc w, w' deux éléments de W , cherchons la décomposition du produit ww' sur $V^0 \perp W$. La composante sur V^0 est bien entendu

$$\Phi_g(ww', 1) = -\Phi_d(w', w) = -\overline{\Phi_g(w', w)} = -\Phi_g(w, w').$$

La composante sur W est $p(ww')$ où p est la projection orthogonale de V sur W . Nous préférons en donner une expression plus semblable à celle du paragraphe 2.2 en termes de produit extérieur. Sur le modèle de [8, §5] cité plus haut, on identifie $\wedge^3 W$ à V^0 en fixant une base orthogonale $\{a, b, ab\}$ de W sur V^0 (cf. proposition 1.15) et en normalisant par $a \wedge b \wedge ab = Q(ab)$. Cela fournit un isomorphisme de $\wedge^2 W$ sur W^* (dual de W sur V^0) identifiant, pour $w, w' \in W$, l'élément $w \wedge w'$ à la forme linéaire $z \mapsto w \wedge w' \wedge z$ ($z \in W$). Enfin, cette forme linéaire s'écrit de façon unique sous la forme $z \mapsto \Phi_g(z, w\bar{\wedge}w')$ et l'élément $w\bar{\wedge}w'$ ainsi défini vérifie

$$(\lambda w)\bar{\wedge}(\lambda' w') = \overline{\lambda\lambda'} (w\bar{\wedge}w') \quad \text{i.e.} \quad (w\lambda)\bar{\wedge}(w'\lambda') = \lambda\lambda' (w\bar{\wedge}w') \quad (\lambda, \lambda' \in V^0).$$

Nous obtenons de la sorte une application bilinéaire (pour la structure à droite de $W \times W$ et à gauche de W) :

$$W \times W \longrightarrow W \quad (w, w') \mapsto w\bar{\wedge}w'.$$

La projection p vérifie elle aussi :

$$p((w\lambda)(w'\lambda')) = p([w(w'\lambda')]\bar{\lambda}) = p(w(\bar{\lambda}'w'))\bar{\lambda} = p(\lambda'(ww'))\bar{\lambda} = \lambda\lambda'p(ww').$$

Ces deux applications bilinéaires coïncident sur les éléments de la base $\{a, b, ab\}$ (simple vérification) donc sont égales. La formule de produit recherchée s'écrit :

$$(v_0 + w)(v'_0 + w') = [v_0v'_0 - \Phi_g(w, w')] + [v_0w' + wv'_0 + w\bar{\wedge}w'] \quad (v_0, v'_0 \in V^0, w, w' \in W). \quad (2.15)$$

Soient à présent t_1, t_2, t_3 des éléments de $\text{SO}_F(V)$ stabilisant V^0 et V^0 -linéaires à gauche ; on les écrit sous la forme :

$$t_i(v_0 + w) = \lambda_i v_0 + g_i w \quad (v_0 \in V^0, w \in W)$$

avec $i \in \{1, 2, 3\}$, $\lambda_i \in (V^0)^1 = \{x \in V^0 / Q(x) = 1\}$, $g_i \in U(W, \Phi_g)$. Notons que le conjugué de t_i est donné par $\hat{t}_i(v_0 + w) = \bar{\lambda}_i v_0 + g_i w$. On développe à l'aide de la formule de produit (2.15) l'équation de trialité (2.2). Elle équivaut à :

$$\lambda_1 = \lambda_2 \lambda_3, \quad \lambda_1 \Phi_g(w, w') = \Phi_g(g_2 w, g_3 w'), \quad g_1 = \lambda_2 g_3 = \bar{\lambda}_3 g_2, \quad g_1(w \bar{\wedge} w') = g_2 w \bar{\wedge} g_3 w',$$

pour tous $w, w' \in W$. Comme l'application $\bar{\wedge}$ vérifie $g w \bar{\wedge} g w' = \overline{\det_{V^0}(g)} g(w \bar{\wedge} w')$ pour tout $g \in \text{GL}_{V^0}(W)$, on conclut que (t_1, t_2, t_3) comme ci-dessus forment un triplet relié si et seulement si $\lambda_1 \overline{\det_{V^0}(g_1)}$ est le carré d'un élément $\xi = \lambda_3$ de norme 1 de V^0 et

$$\begin{cases} t_2(v_0 + w) = \xi^{-1} \lambda_1 v_0 + \xi g_1 w, \\ t_3(v_0 + w) = \xi v_0 + \xi \bar{\lambda}_1 g_1 w, \end{cases} \quad \xi \in V^0, \quad Q(\xi) = 1, \quad \xi^2 = \lambda_1 \overline{\det_{V^0}(g_1)}. \quad (2.16)$$

2.6 Trialité et caractères semi-simples

Nous sommes maintenant prêts à résoudre le problème de la stabilité des caractères semi-simples autoduaux par trialité. Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$ et soit $V = V^0 \perp W$ la décomposition de V correspondante : V^0 est le noyau de β (§1.4). Rappelons que si V^0 est de dimension 2 et déployée, W possède une polarisation complète canonique $W = W^+ \oplus W^-$, d'où une injection canonique ι de $\text{GL}_F(W^+)$ dans $\text{SO}_F(W)$.

Lemme 2.17. *Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$ une strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$. Les sous-groupes $H^i(\beta, \Lambda)$ et $J^i(\beta, \Lambda)$, $i \geq 1$, sont stables par trialité.*

Démonstration. Comme d'habitude ceci se démontre par induction sur une suite d'approximation de la strate. Pour une strate nulle, la proposition 2.10 nous assure que les groupes $P^i(\Lambda)$ sont stables par trialité, celle-ci étant bien définie sur le pro- p -groupe $P^1(\Lambda)$ (§2.1) qui contient les sous-groupes considérés. Soit alors $[\Lambda, n, r+1, \gamma]$ une strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$ équivalente à $[\Lambda, n, r+1, \beta]$ (corollaire 1.24). On a $J^i(\beta, \Lambda) = (P^i(\Lambda) \cap G_\beta) J^{[\frac{r+1}{2}]}(\gamma, \Lambda)$ et une relation analogue pour les H^i (Lemme 2.12). Supposons $J^{[\frac{r+1}{2}]}(\gamma, \Lambda)$ stable par trialité. Comme β est un élément de $\mathfrak{so}_F(V)$ fixé par l'action de Γ , son centralisateur dans $\text{Spin}_F(V)$ est stable par l'action de Γ (§2.1) et son intersection avec $P^i(\Lambda)$ (via l'unique section de $P^i(\Lambda)$ dans $\text{Spin}_F(V)$) l'est aussi, $J^i(\beta, \Lambda)$ est donc stable par trialité, de même que H^i . ■

Théorème 2.18. *Soit θ un caractère semi-simple autodual de $H^1(\beta, \Lambda)$. Alors les images de θ par les applications de trialité sont des caractères semi-simples autoduaux de $H^1(\beta, \Lambda)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

- (i) V^0 est de dimension 4 ou 8 ;
- (ii) V^0 est anisotrope de dimension 2 et la restriction de θ à $H^1(\beta, \Lambda) \cap U(W, V^0/F)$ est triviale sur l'intersection de $H^1(\beta, \Lambda)$ avec le centre de $U(W, V^0/F)$;

- (iii) V^0 est déployée de dimension 2 et la restriction de θ à $H^1(\beta, \Lambda) \cap \iota(\mathrm{GL}_F(W^+))$ est triviale sur l'intersection de $H^1(\beta, \Lambda)$ avec le centre de $\iota(\mathrm{GL}_F(W^+))$.

En outre, dans ces conditions, le caractère θ est en fait fixe par trialité.

On appellera *caractère semi-simple spécial* de $H^1(\beta, \Lambda)$ un caractère semi-simple autodual de $H^1(\beta, \Lambda)$ vérifiant une des conditions du théorème. On notera $\mathcal{C}^0(\Lambda, \beta)$ l'ensemble des caractères semi-simples spéciaux de $H^1(\beta, \Lambda)$. Ces caractères sont fixes par trialité.

Démonstration. Commençons par rappeler que par définition, tout caractère semi-simple autodual de $H^1(\beta, \Lambda)$ est trivial sur $H^1(\beta, \Lambda) \cap \mathrm{SO}(V^0) = P^1(\Lambda \cap V^0)$, puisque la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ est somme d'une strate *nulle* sur V^0 et de strates simples non nulles sur W . C'est pourquoi les conditions données sont nécessaires. En effet, si V^0 est anisotrope de dimension 2, l'intersection de $H^1(\beta, \Lambda)$ avec le centre de $\mathrm{U}(W, V^0/F)$ s'identifie à

$$(1 + \mathfrak{p}_{V^0})^1 = \{\mu \in 1 + \mathfrak{p}_{V^0}/Q(\mu) = 1\}$$

via $\mu \mapsto [v_0 + w \mapsto v_0 + \mu w]$ ($v_0 \in V^0$, $w \in W$). Soit $t_1(v_0 + w) = \lambda^2 v_0 + w$ avec $\lambda \in (1 + \mathfrak{p}_{V^0})^1$. D'après (2.16), $\hat{t}_2 : v_0 + w \mapsto v_0 + \lambda w$ est image de t_1 par trialité, donc $\theta(\hat{t}_2)$ doit être trivial, c.q.f.d. Le cas (iii) se traite de façon analogue en utilisant (2.6).

Montrons maintenant que ces conditions sont suffisantes, c'est-à-dire que *si ν est une application de trialité et θ un caractère semi-simple autodual de $H^1(\beta, \Lambda)$ vérifiant (i), (ii) ou (iii), alors $\theta \circ \nu$ est encore un caractère semi-simple autodual de $H^1(\beta, \Lambda)$* .

La proposition 2.10 (iii) est le premier ingrédient de la démonstration puisque la restriction de θ à $P^{[n/2]+1}(\Lambda)$ est égale à ψ_β . Elle fournit :

$$\theta \circ \nu(x) = \theta(x) \quad \text{pour tout } x \in P^{[n/2]+1}(\Lambda). \quad (2.19)$$

Commençons par le cas (i) où il n'y a pas de condition supplémentaire sur θ . Si β est nul, le caractère est trivial. Si $\dim V^0 = 4$, la strate $[\Lambda, n, n-1, \beta]$ est semi-simple (lemme 1.10) de sorte que

$$\begin{aligned} H^1(\beta, \Lambda) &= (P^1(\Lambda^0) \times H^1(\beta_W, \Lambda_W)) P^{[n/2]+1}(\Lambda) \\ &= (P^1(\Lambda^0) \times (P^1(\Lambda_W) \cap G_{\beta_W})) P^{[n/2]+1}(\Lambda). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Le caractère θ est trivial sur $P^1(\Lambda^0)$. D'après la formule de trialité (2.14), si t_1 appartient à $\mathrm{SO}_F(V^0) \times \mathrm{SO}_F(W)$, les actions de t_1 et $\nu(t_1)$ sur V^0 ou W diffèrent d'une multiplication à droite, de la forme $y \mapsto yz$ ou $ya \mapsto (yz)a$ ($y \in V^0$) dans les notations de la formule, par un élément z de V^0 et l'on a $Q(z) = 1$ puisqu'on reste dans un groupe spécial orthogonal.

Supposons $[\Lambda_W, n, 0, \beta_W]$ simple (cas (iv) du paragraphe 1.7). Sur $P^1(\Lambda_W) \cap G_{\beta_W}$ le caractère simple $\theta|_{H^1(\beta_W, \Lambda_W)}$ factorise par un caractère du déterminant : $G_{\beta_W} \longrightarrow F[\beta_W]$ [5, Définition 3.2.1]. Le déterminant de la multiplication à droite par z dans V^0 vu comme espace vectoriel

sur $F[\beta_W]$ est la norme de z dans l'extension $F[\beta_W][z]$, soit $Q(z) = 1$. Finalement $\theta \circ \nu = \theta$, d'où la stabilité voulue.

Sinon (cas (iii) du paragraphe 1.7) l'action de β_W a deux sous-espaces propres, qui sont $W_\lambda = (e_{F[c]}^+ V^0)a$ et $W_{-\lambda} = (e_{F[c]}^- V^0)a$ dans les notations de la démonstration du lemme 1.7. Le caractère $\theta|_{H^1(\beta_W, \Lambda_W)}$ possède une décomposition d'Iwahori par rapport au sous-groupe de Levi M_W stabilisant ces sous-espaces propres et à un sous-groupe parabolique de facteur de Levi M_W [19, §5.3]. Sur l'intersection avec M_W , identifiée à $\tilde{H}^1(\lambda, \Lambda_{W_\lambda})$, il factorise par un caractère du déterminant. Une multiplication à droite par $z \in V^0$ conserve $e_{F[c]}^+ V^0$ et $e_{F[c]}^- V^0$ et un petit calcul dans V^0 , décomposé comme d'habitude en $V^0 = F[c] \perp F[c]b$ avec $Q(b) \neq 0$, montre que le déterminant de sa restriction à $e_{F[c]}^+ V^0$ est $Q(z)$. On a donc comme précédemment $\theta \circ \nu = \theta$.

Plaçons-nous à présent dans le cas (ii). Soit r , $0 \leq r \leq n$ le plus grand entier tel que la strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ soit semi-simple : on raisonne par induction (décroissante) sur r pour montrer qu'un caractère semi-simple autodual trivial sur l'intersection de $H^1(\beta, \Lambda)$ avec le centre de $U(W, V^0/F)$ est fixe par trialité. Si $r = n$ la strate est nulle et θ est trivial. Sinon, soit $[\Lambda, n, r+1, \gamma]$ une strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$ équivalente à $[\Lambda, n, r+1, \beta]$ et de même type (théorème 1.23). D'après le lemme 2.12 on peut écrire

$$H^1(\beta, \Lambda) = (P^1(\Lambda) \cap G_\beta) H^{[\frac{r+1}{2}]+1}(\gamma, \Lambda),$$

produit de deux sous-groupes stables par trialité. D'après le lemme 2.13 (ii), la restriction de θ à $H^{[\frac{r+1}{2}]+1}(\gamma, \Lambda) = H^{[\frac{r+1}{2}]+1}(\beta, \Lambda)$ est de la forme $\theta_0 \psi_{\beta-\gamma}$ pour un $\theta_0 \in \mathcal{C}(\Lambda, m', \gamma)$; elle est fixe par trialité vu (2.19) et l'hypothèse inductive (noter que $\beta - \gamma$ est de trace nulle sur V^0 donc $\psi_{\beta-\gamma}$ est trivial sur le centre de $U(W, V^0/F)$). Ensuite vu le lemme 1.8 :

$$P^1(\Lambda) \cap G_\beta = P^1(\Lambda^0) \times (P^1(\Lambda_W) \cap U(W, V^0/F) \cap G_\beta).$$

Soit t_1 un élément de ce sous-groupe. D'après la formule de trialité (2.16) les actions de t_1 et $\nu(t_1)$ sur W diffèrent d'une multiplication à gauche par un élément z de V^0 de norme 1, c'est-à-dire d'un élément du centre de $U(W, V^0/F)$. L'hypothèse assure donc que $\theta \circ \nu$ et θ coïncident sur ce sous-groupe, c.q.f.d.

Le cas (iii) se traite de la même manière en utilisant le lemme 1.9 au lieu du lemme 1.8 : d'après la formule de trialité (2.6), si $t_1 \in O'(V)$ conserve V^0 , W^+ et W^- , les actions de t_1 et $\nu(t_1)$ sur W^+ diffèrent d'un scalaire, d'où l'égalité voulue $\theta \circ \nu = \theta$. ■

3 Caractères semi-simples de $G_2(F)$ et entrelacement

Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$. Nous lui associons une famille de caractères semi-simples $\bar{\theta}$ du groupe $\bar{H}^1(\beta, \Lambda) = H^1(\beta, \Lambda) \cap G_2(F)$ dont nous déterminons

l'entrelacement et le comportement par transfert (3.1). A chaque tel caractère est attachée une unique représentation irréductible $\bar{\eta}$ de $\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ telle que $\bar{\eta}$ contienne $\bar{\theta}$ (3.2). Comme dans un groupe linéaire ou classique, l'espace d'entrelacements de $\bar{\eta}$ est de dimension 0 ou 1 (3.3).

3.1 Entrelacement des caractères semi-simples de $G_2(F)$

Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$. Les sous-groupes $H^i(\beta, \Lambda)$ et $J^i(\beta, \Lambda)$, $i \geq 1$, sont stables par trialité (lemme 2.17) et l'on pose $\bar{H}^1(\beta, \Lambda) = \tilde{H}^1(\beta, \Lambda) \cap \bar{G} = H^1(\beta, \Lambda)^\Gamma$ et $\bar{J}^1(\beta, \Lambda) = \tilde{J}^1(\beta, \Lambda) \cap \bar{G} = J^1(\beta, \Lambda)^\Gamma$. Ce sont des sous-groupes ouverts compacts de $G_2(F)$. Dans la suite, nous supprimerons (β, Λ) des notations pour certaines démonstrations.

Comme nous l'avons vu dans le théorème 2.18, le groupe Γ d'automorphismes de $P^1(\Lambda)$ opère sur $H^1(\beta, \Lambda)$ et sur l'ensemble de ses caractères, mais ne conserve pas l'ensemble des caractères semi-simples autoduaux de $H^1(\beta, \Lambda)$: seul l'ensemble des caractères semi-simples *spéciaux* de $H^1(\beta, \Lambda)$ est conservé, et du reste fixé, par trialité. Cela ne nous empêche pas de prendre modèle sur [17] et d'utiliser la correspondance de Glauberman entre l'ensemble des classes d'équivalence Γ -invariantes de représentations irréductibles de $H^1(\beta, \Lambda)$ et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de $\bar{H}^1(\beta, \Lambda)$ [17, §2]. On définit l'ensemble $\bar{\mathcal{C}}(\Lambda, \beta)$ des *caractères semi-simples* de $\bar{H}^1(\beta, \Lambda)$ comme l'image par cette correspondance de l'ensemble des caractères semi-simples de $H^1(\beta, \Lambda)$ qui sont Γ -invariants, c'est-à-dire des caractères semi-simples spéciaux. L'image par la correspondance de Glauberman d'une représentation de dimension 1 est sa restriction, donc la restriction des caractères est une *bijection* :

$$\mathcal{C}^0(\Lambda, \beta) \xrightarrow{\cong} \bar{\mathcal{C}}(\Lambda, \beta)$$

Notation 3.1. Soit $\bar{\mathcal{C}}(\Lambda, \beta)$ l'ensemble des caractères semi-simples de $\bar{H}^1(\beta, \Lambda)$. Si $\bar{\theta}$ appartient à $\bar{\mathcal{C}}(\Lambda, \beta)$ on note θ le caractère semi-simple spécial de $H^1(\beta, \Lambda)$ de restriction $\bar{\theta}$ à $\bar{H}^1(\beta, \Lambda)$, et $\tilde{\theta}$ le caractère semi-simple τ -invariant de $\tilde{H}^1(\beta, \Lambda)$ de restriction θ à $H^1(\beta, \Lambda)$.

Passons aux propriétés essentielles d'entrelacement et de transfert, en commençant par le fait dit "d'intersection simple" :

Lemme 3.2. [19, Lemme 2.6]. Notons $P_\beta^1(\Lambda) = P^1(\Lambda) \cap G_\beta$. Soit $x \in G_\beta$. Alors

$$P^1(\Lambda)xP^1(\Lambda) \cap G_\beta = P_\beta^1(\Lambda)xP_\beta^1(\Lambda).$$

Démonstration. Celle de *loc. cit.* reste valide avec notre définition un peu plus large de strate semi-simple gauche. ■

Proposition 3.3. Soit $\bar{\theta}$ un caractère semi-simple de $\bar{H}^1(\beta, \Lambda)$. L'entrelacement de $\bar{\theta}$ dans $G_2(F)$ est égal à $\bar{J}^1(\beta, \Lambda) \bar{G}_\beta \bar{J}^1(\beta, \Lambda)$.

Démonstration. Reprenons l'argument de [18, Proposition 3.27], à base de correspondance de Glauberman. La première étape consiste à passer de \tilde{G} à G : l'entrelacement de θ dans G est l'intersection avec G de celui de $\tilde{\theta}$, soit $\tilde{J}^1 \tilde{G}_\beta \tilde{J}^1 \cap G = J^1 G_\beta J^1$ ([17, Corollaire 2.5], [18, Théorème 3.22], [16, §2]) et son entrelacement dans G' est $J^1 G'_\beta J^1$.

La trialité n'est pas définie sur le groupe G' : nous devons relever θ en un caractère $s(\theta)$ du sous-groupe $s(H^1)$ de $\text{Spin}_F(V)$, où s est la section de $P^1(\Lambda)$ (§2.3). L'unicité d'une section homomorphe d'un pro- p -sous-groupe (§2.1) entraîne :

$$\forall g \in \text{Spin}_F(V) \quad s(H^1 \cap \pi(g)^{-1} H^1 \pi(g)) = s(H^1) \cap g^{-1} s(H^1) g.$$

Donc l'entrelacement de $s(\theta)$ est image inverse de celui de θ , c'est-à-dire $s(J^1) \pi^{-1}(G'_\beta) s(J^1)$.

Le caractère $\bar{\theta}$ s'obtient aussi bien par restriction de $s(\theta)$ à \bar{H}^1 , c'est-à-dire par une correspondance de Glauberman appliquée à l'action de Γ sur $s(H^1)$: alors [17, Corollaire 2.5] nous dit que l'entrelacement de $\bar{\theta}$ est $(s(J^1) \pi^{-1}(G'_\beta) s(J^1)) \cap \bar{G} = (s(J^1) \pi^{-1}(G'_\beta) s(J^1))^\Gamma$.

Il n'y a plus qu'à établir l'égalité $(s(J^1) \pi^{-1}(G'_\beta) s(J^1))^\Gamma = \bar{J}^1 \bar{G}_\beta \bar{J}^1$. Il suffit pour cela d'appliquer le Théorème 2.3 de [16] à Γ , groupe résoluble d'ordre 6 premier à p (voir la remarque finale de *loc. cit.* §2) agissant sur $\text{Spin}_F(V)$, au pro- p -sous-groupe $U = s(J^1)$ et à $H = \pi^{-1}(G'_\beta)$, stable par trialité puisque β l'est. On est ainsi ramené à la vérification de l'hypothèse de ce théorème :

$$\forall g \in \pi^{-1}(G'_\beta) \quad (s(J^1) g s(J^1)) \cap \pi^{-1}(G'_\beta) = s(J^1 \cap G_\beta) g s(J^1 \cap G_\beta).$$

Remarquons que $J^1 \cap G_\beta = P_\beta^1(\Lambda)$. On a (cf. [16, Théorème 4.7]) :

$$\begin{aligned} s(J^1 \cap G_\beta) g s(J^1 \cap G_\beta) &\subseteq (s(J^1) g s(J^1)) \cap \pi^{-1}(G'_\beta) \\ &\subseteq (s(P^1(\Lambda)) g s(P^1(\Lambda))) \cap \pi^{-1}(G'_\beta) \end{aligned}$$

La projection de ce dernier sous-ensemble sur G' est contenue dans $(P^1(\Lambda) \pi(g) P^1(\Lambda)) \cap G'_\beta$, qui est égal à $P_\beta^1(\Lambda) \pi(g) P_\beta^1(\Lambda)$ par le lemme 3.2. L'égalité voulue en résulte. \blacksquare

La propriété dite "de transfert" s'étend elle aussi aux caractères semi-simples de $G_2(F)$.

Proposition 3.4. *Soient $[\Lambda, n, 0, \beta]$ et $[\Lambda', n', 0, \beta]$ deux strates semi-simples de $\mathfrak{g}_2(F)$. Il existe une bijection canonique*

$$\tau_{\Lambda, \Lambda', \beta} : \bar{\mathcal{C}}(\Lambda, \beta) \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}(\Lambda', \beta)$$

qui transforme un caractère semi-simple $\bar{\theta}$ de $\bar{\mathcal{C}}(\Lambda, \beta)$ en l'unique caractère semi-simple $\bar{\theta}'$ de $\bar{\mathcal{C}}(\Lambda', \beta)$ qui est entrelacé à $\bar{\theta}$ par un élément de \bar{G}_β . Dans ce cas, tout élément de \bar{G}_β entrelace les deux caractères.

Démonstration. Les deux strates $[\Lambda, n, 0, \beta]$ et $[\Lambda', n', 0, \beta]$ sont des strates semi-simples dans $\mathfrak{gl}_F(V)$. Par [19, Proposition 3.2], il existe une bijection canonique $\tau_{\Lambda, \Lambda', \beta}$ entre les caractères semi-simples de $\tilde{H}^1(\beta, \Lambda)$ et ceux de $\tilde{H}^1(\beta, \Lambda')$ définie par : si θ est un caractère semi-simple de $\tilde{H}^1(\beta, \Lambda)$, $\theta' = \tau_{\Lambda, \Lambda', \beta}(\theta)$ est le caractère semi-simple de $\tilde{H}^1(\beta, \Lambda')$ entrelacé à θ par un (tout) élément de \tilde{G}_β . Cette bijection commute à l'involution τ (les éléments de G_β qui entrelacent deux caractères entrelacent aussi leurs images sous l'action de τ) donc se restreint en une bijection de $\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda, \beta)^\tau$ sur $\tilde{\mathcal{C}}(\Lambda', \beta)^\tau$. En composant avec la correspondance de Glauberman, on obtient une bijection $\tau_{\Lambda, \Lambda', \beta}$ des caractères semi-simples autoduaux de $H^1(\beta, \Lambda)$ sur ceux de $H^1(\beta, \Lambda')$ encore caractérisée par ([17, cor. 2.5]) :

$$\tau_{\Lambda, \Lambda', \beta}(\theta) = \theta' \text{ si et seulement si } \theta \text{ et } \theta' \text{ sont entrelacés par un (tout) élément de } G_\beta.$$

Par conséquent, compte tenu de la caractérisation des caractères spéciaux de $H^1(\beta, \Lambda)$ et $H^1(\beta, \Lambda')$ (théorème 2.18), $\tau_{\Lambda, \Lambda', \beta}$ se restreint en une bijection de $\mathcal{C}^0(\Lambda, \beta)$ sur $\mathcal{C}^0(\Lambda', \beta)$, d'où l'énoncé par restriction à $\bar{H}^1(\beta, \Lambda)$ et $\bar{H}^1(\beta, \Lambda')$. ■

3.2 Extensions de Heisenberg

La suite est classique : on passe du caractère semi-simple $\bar{\theta}$ de $\bar{H}^1(\beta, \Lambda)$ à une représentation $\bar{\eta}$ de $\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$, soit par une construction directe à la Heisenberg, soit par correspondance de Glauberman à partir de l'unique représentation irréductible η de $J^1(\beta, \Lambda)$ contenant θ .

Proposition 3.5. *Soit $\bar{\theta}$ un caractère semi-simple de $\bar{H}^1(\beta, \Lambda)$. Il existe une unique représentation irréductible $\bar{\eta}$ de $\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ contenant $\bar{\theta}$. Sa restriction à $\bar{H}^1(\beta, \Lambda)$ est multiple de $\bar{\theta}$ et son entrelacement est $\bar{J}^1(\beta, \Lambda) \bar{G}_\beta \bar{J}^1(\beta, \Lambda)$. Pour $g \in \bar{G}_\beta$, la dimension de l'espace d'entrelacements $\text{Hom}_{\bar{J}^1 \cap g^{-1} \bar{J}^1 g}(\bar{\eta}, \bar{\eta}^g)$ est égale à 1.*

Démonstration. On rappelle la notation 3.1. Soit $\tilde{\eta}$ l'unique représentation irréductible de \tilde{J}^1 contenant $\tilde{\theta}$; son entrelacement est $\tilde{J}^1 \tilde{G}_\beta \tilde{J}^1$ [18, Corollaire 3.25]. Par unicité, $\tilde{\eta}$ est fixée par τ à équivalence près. Une première correspondance de Glauberman lui associe donc une unique (classe de) représentation irréductible η de J^1 contenant θ [17, Théorème 2.1 et Lemme 2.3]. Comme θ est invariant par trialité, la classe de η l'est aussi et une deuxième correspondance de Glauberman lui associe $\bar{\eta}$, unique (classe de) représentation irréductible de $\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ contenant $\bar{\theta}$ (mêmes motifs). Comme $\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ entrelace $\bar{\theta}$, la restriction de $\bar{\eta}$ à $\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ est en fait multiple de $\bar{\theta}$.

Par ailleurs, la restriction à \bar{J}^1 de la forme alternée non dégénérée $(x, y) \mapsto \theta([x, y])$ sur J^1/H^1 définit une forme alternée non dégénérée $(x, y) \mapsto \bar{\theta}([x, y])$ sur \bar{J}^1/\bar{H}^1 (cf. lemme 3.7). Il existe donc une unique (classe de) représentation irréductible de \bar{J}^1 contenant $\bar{\theta}$: c'est $\bar{\eta}$.

L'entrelacement de $\bar{\eta}$ est évidemment contenu dans celui de $\bar{\theta}$. Pour obtenir l'inclusion opposée on est une fois de plus gêné par le fait que la trialité n'agit pas sur G lui-même. On

relève donc η en une représentation $s(\eta)$ de $s(J^1)$: $\bar{\eta}$ s'obtient aussi bien par correspondance de Glauberman à partir de $s(\eta)$. Or l'entrelacement de $s(\eta)$ est l'image inverse de celui de η soit $s(J^1)\pi^{-1}(G'_\beta)s(J^1)$, grâce à la preuve de 3.3 et à [17, Lemme 2.4]. Les deux mêmes ingrédients fournissent l'entrelacement voulu pour $\bar{\eta}$.

En fait, seule l'inclusion de l'entrelacement dans $\bar{J}^1(\beta, \Lambda) \bar{G}_\beta \bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ est utilisée dans la démonstration du dernier point, que l'on reporte au paragraphe suivant car elle est assez longue : nous ne pouvons pas imiter les démonstrations existantes, qui adaptent celle de [5, Proposition 5.1.8]. En effet elles se placent toutes dans l'algèbre de Lie, or nous ne disposons pas d'une application commode de $\mathfrak{g}_2(F)$ dans $G_2(F)$ puisque la transformation de Cayley ne joue pas ce rôle (Remarque 2.11). ■

3.3 Dimension des espaces d'entrelacement

Reste à établir la propriété cruciale de la représentation $\bar{\eta}$: pour $g \in \bar{G}_\beta$,

$$\dim \text{Hom}_{\bar{J}^1 \cap g^{-1} \bar{J}^1 g} (\bar{\eta}, \bar{\eta}^g) = 1.$$

Commençons par introduire des notations, pour ce paragraphe uniquement, qui nous permettront de travailler indifféremment dans un groupe linéaire sur F , un groupe classique sur F ou $G_2(F)$. On note G un tel groupe, puis H^1 , J^1 , θ et η les groupes, caractère semi-simple et extension de Heisenberg définis dans G relativement à une strate semi-simple $[\Lambda, n, 0, \beta]$ de $\text{Lie } G$ fixée. Soit $g \in G$ commutant à β . On définit :

- θ^g, η^g les représentations de $g^{-1}H^1g$ et $g^{-1}J^1g$ conjuguées de θ, η ;
- $K_g = \ker(\theta) \cap g^{-1}\ker(\theta)g$, $H_g = H^1 \cap g^{-1}H^1g$ et $J_g = J^1 \cap g^{-1}J^1g$;
- L_g le sous-groupe de J_g engendré par $H^1 \cap g^{-1}J^1g$ et $J^1 \cap g^{-1}H^1g$, c'est-à-dire le produit $(H^1 \cap g^{-1}J^1g)(J^1 \cap g^{-1}H^1g)$;
- M_g le noyau de la forme alternée $(x, y) \mapsto \theta([x, y])$ sur J_g/H_g vu comme espace vectoriel sur \mathbb{F}_p . On a $K_g \triangleleft H_g \triangleleft L_g \triangleleft M_g \triangleleft J_g$.

Proposition 3.6. *La dimension de $\text{Hom}_{J_g}(\eta, \eta^g)$ est égale à 1 si et seulement si*

- (i) $M_g = L_g$,
- (ii) $(H^1 M_g)^\perp = H^1 J_g$,
- (iii) $((g^{-1}H^1g)M_g)^\perp = (g^{-1}H^1g)J_g$.

Démonstration. La restriction de η à $H^1 \cap g^{-1}J^1g$ est scalaire, multiple de θ , celle de η^g à $J^1 \cap g^{-1}H^1g$ est scalaire, multiple de θ^g , or θ et θ^g coïncident sur l'intersection H_g . La restriction à L_g de toute composante irréductible commune à $\eta|_{J_g}$ et $\eta^g|_{J_g}$ est donc scalaire et opère par le caractère θ_g de L_g qui est l'unique caractère prolongeant les deux précédents. Le groupe fini M_g/K_g est commutatif, c'est le centre de J_g/K_g . Le caractère θ_g de L_g/K_g a donc $[M_g : L_g]$ prolongements à M_g . Soit X l'ensemble de ces prolongements et $\chi \in X$, la représentation $c\text{-Ind}_{M_g}^{J_g} \chi$ est multiple d'une unique représentation irréductible $h(\chi)$, de degré $[J_g : M_g]^{1/2}$ et multiplicité $[J_g : M_g]^{1/2}$. Les $h(\chi)$, $\chi \in X$, sont deux à deux non équivalentes puisque leurs caractères centraux sont distincts. En outre

$$c\text{-Ind}_{L_g}^{J_g} \theta_g = \sum_{\chi \in X} c\text{-Ind}_{M_g}^{J_g} \chi = \sum_{\chi \in X} [J_g : M_g]^{1/2} h(\chi),$$

donc toute composante irréductible commune à η et η^g est l'une des représentations $h(\chi)$. Le sous-groupe H^1M_g de J^1 est totalement isotrope pour la forme $\theta([x, y])$. Pour $\chi \in X$, les caractères θ de H^1 et χ de M_g coïncident sur $H^1 \cap M_g = H^1 \cap g^{-1}J^1g$ donc définissent un unique caractère $\theta\chi$ de H^1M_g (M_g entrelace θ). Soit alors Y un sous-espace totalement isotrope maximal de J^1 contenant H^1M_g et ξ un caractère de Y prolongeant $\theta\chi$. La représentation η est équivalente à $c\text{-Ind}_Y^{J^1} \xi$: sa restriction à M_g contient χ donc sa restriction à J_g contient $h(\chi)$. On calcule la multiplicité de $h(\chi)$ dans $\eta|_{J_g}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} [J_g : M_g]^{1/2} \langle \eta, h(\chi) \rangle_{J_g} &= \langle \eta, c\text{-Ind}_{M_g}^{J_g} \chi \rangle_{J_g} = \langle \eta, \chi \rangle_{M_g} = \langle c\text{-Ind}_Y^{J^1} \xi, \theta\chi \rangle_{H^1M_g} \\ &= \langle c\text{-Ind}_Y^{J^1} \xi, c\text{-Ind}_{H^1M_g}^{J^1} \theta\chi \rangle_{J^1} = \langle c\text{-Ind}_Y^{J^1} \xi, \sum_{\xi'} c\text{-Ind}_Y^{J^1} \xi' \rangle_{J^1} \end{aligned}$$

où la somme porte sur les prolongements ξ' de $\theta\chi$ à Y . Chacune de ces induites est isomorphe à η et il reste

$$\langle \eta, h(\chi) \rangle_{J_g} = [J_g : M_g]^{-1/2} [Y : H^1M_g] = d_1$$

La multiplicité d_2 de $h(\chi)$ dans $\eta|_{J_g}$ est donnée par une formule analogue, en travaillant avec le sous-groupe $g^{-1}H^1gM_g$ de $g^{-1}J^1g$.

L'ensemble des composantes irréductibles communes à η et η^g est donc exactement l'ensemble des $h(\chi)$, $\chi \in X$ et la dimension de $\text{Hom}_{J_g}(\eta, \eta^g)$ est $d_1d_2[M_g : L_g]$, une puissance de p . Cette dimension est égale à 1 si et seulement si $M_g = L_g$ et $d_1 = d_2 = 1$.

Reprenons l'expression de d_1 (le cas de d_2 est évidemment semblable). On a $[J_g : M_g] = [H^1J_g : H^1M_g]$ et $[Y : H^1M_g][H^1M_g : H^1] = [J^1 : H^1]^{1/2}$ d'où

$$d_1^2 = \frac{[J^1 : H^1]}{[H^1J_g : H^1M_g][H^1M_g : H^1]^2} = \frac{[J^1 : H^1]}{[J^1 : (H^1M_g)^\perp][H^1J_g : H^1M_g][H^1M_g : H^1]}.$$

Comme $H^1 \subset H^1M_g \subset H^1J_g \subset (H^1M_g)^\perp \subset J^1$ il reste $d_1^2 = [(H^1M_g)^\perp : H^1J_g]$. ■

Le lemme suivant est une simple formalisation de la remarque [17, p. 135].

Lemme 3.7. *Soit Γ un groupe d'ordre 2 ou 3 agissant sur un espace symplectique V sur \mathbb{F}_p dont on note \langle, \rangle la forme, fixée par Γ . On suppose p différent de 2 et 3. Pour tout sous-espace X de V stable sous l'action de Γ , l'orthogonal de X^Γ dans V^Γ est égal à $(X^\perp)^\Gamma$. En particulier, le noyau de la restriction de la forme à V^Γ est formé des points fixes du noyau de la forme sous Γ .*

Démonstration. Le groupe Γ est engendré par un élément s d'ordre 2 ou 3. Le polynôme caractéristique de s agissant sur V est égal à $X^2 - 1$ ou $X^3 - 1$ de sorte que V se décompose en somme directe des deux sous-espaces V_1 , sous-espace propre de s pour la valeur propre 1, et V_s , noyau de $s + 1$ ou de $s^2 + s + 1$ selon le cas. Ces sous-espaces sont orthogonaux pour la forme symplectique : si $x \in V_1$ et $y \in V_s$ alors

$$\begin{aligned} \text{si } s^2 = 1 \quad & 2 \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, sy \rangle = 0; \\ \text{si } s^3 = 1 \quad & 3 \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, sy \rangle + \langle x, s^2y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Le sous-espace X se décompose de même en $X = X_1 \oplus X_s$ avec $X_1 = X^\Gamma$. Son orthogonal dans V est la somme directe de l'orthogonal de X_1 dans V_1 et de l'orthogonal de X_s dans V_s d'où l'assertion. ■

Corollaire 3.8. *Soit Γ un groupe d'ordre 2 ou 3 agissant sur le groupe ambiant G en stabilisant les groupes H^1 et J^1 et le caractère θ . Soit $g \in G^\Gamma$ centralisant β . Soit $H^{1\Gamma}$ et $J^{1\Gamma}$ les groupes de points fixes de Γ dans H^1 et J^1 respectivement, soit θ^Γ la restriction de θ à $H^{1\Gamma}$ et soit η^Γ la représentation irréductible de $J^{1\Gamma}$ contenant θ^Γ .*

- (i) *Les sous-groupes de points fixes de Γ : J_g^Γ , M_g^Γ , L_g^Γ , H_g^Γ et K_g^Γ , sont exactement les groupes obtenus par les définitions du début de ce paragraphe à partir de $H^{1\Gamma}$ et $J^{1\Gamma}$.*
- (ii) *Si $\dim \text{Hom}_{J_g}(\eta, \eta^g) = 1$, alors $\dim \text{Hom}_{J_g^\Gamma}(\eta^\Gamma, \eta^{\Gamma g}) = 1$.*

Démonstration. La première assertion, pour J_g^Γ , H_g^Γ et K_g^Γ , découle de $g \in G^\Gamma$. Pour L_g^Γ elle résulte de l'application du théorème 2.3 de [16]. Enfin, pour M_g^Γ , elle provient de l'application du lemme 3.7 à l'espace symplectique J_g/H_g .

Utilisons maintenant la proposition 3.6. L'hypothèse de la deuxième assertion implique $M_g = L_g$, d'où $M_g^\Gamma = L_g^\Gamma$; $(H^1 M_g)^\perp = H^1 J_g$ donc par le lemme 3.7 $(H^{1\Gamma} M_g^\Gamma)^\perp = H^{1\Gamma} J_g^\Gamma$; $((g^{-1} H^1 g) M_g)^\perp = (g^{-1} H^1 g) J_g$ donc $((g^{-1} H^{1\Gamma} g) M_g^\Gamma)^\perp = (g^{-1} H^{1\Gamma} g) J_g^\Gamma$; d'où le résultat. ■

Il n'y a plus qu'à conclure. La propriété d'entrelacement voulue, $\dim \text{Hom}_{J_g}(\eta, \eta^g) = 1$, est valide pour les caractères semi-simples de $GL(n, F)$ lui-même : la démonstration de [18, Proposition 3.31] s'applique mot pour mot dans ce cas. Le corollaire ci-dessus nous permet de propager cette propriété de $GL(n, F)$ à un groupe classique sur F défini comme groupe de points fixes d'une involution (si $p \neq 2$). Le cas de $SO(8, F)$ s'obtient à partir de $O(8, F)$ puisque les sous-groupes considérés sont des pro- p -groupes, contenus dans $SO(8, F)$. Enfin on passe de $SO(8, F)$ à $G_2(F)$ (si $p \neq 2, 3$) via la trialité et le corollaire à nouveau.

4 Représentations supercuspidales de $G_2(F)$

Soient $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple non nulle de $\mathfrak{g}_2(F)$ au sens du paragraphe 1.2, $\bar{\eta}$ un caractère semi-simple de $\bar{H}^1(\beta, \Lambda)$ et $\bar{\eta}$ son extension de Heisenberg à $\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ (prop. 3.5). On définit le groupe $\bar{J}(\beta, \Lambda)$ sur lequel vivent les types semi-simples construits à partir de ces données puis on sélectionne des prolongements de $\bar{\eta}$ à ce groupe (§4.1) à partir desquels on construit des représentations supercuspidales de $G_2(F)$ dans les cas où les sous-groupes $\bar{P}(\Lambda)$ et \bar{G}_β satisfont certaines conditions (§4.2). La méthode est une variation sur celle de S. Stevens [19].

4.1 β -extensions

Pour tout sous-groupe H de $SO_F(V)$ on note H' son intersection avec le groupe orthogonal réduit $G' = O'_F(V)$. Soit $P'_\beta(\Lambda) = P'(\Lambda) \cap G_\beta$ et $P^i_\beta(\Lambda) = P^i(\Lambda) \cap G_\beta$, $i \geq 1$. Le sous-groupe $\pi^{-1}(P'(\Lambda))$ de $\text{Spin}_F(V)$ est stable par trialité (§2.3) ainsi que son intersection $\pi^{-1}(P'_\beta(\Lambda))$ avec le centralisateur de β .

On pose alors $\bar{P}(\Lambda) = (\pi^{-1}(P'(\Lambda)))^\Gamma$; c'est un sous-groupe ouvert compact maximal de $G_2(F)$, le fixateur du point de l'immeuble attaché à Λ . On pose enfin $\bar{P}_\beta(\Lambda) = \bar{P}(\Lambda) \cap G_\beta$.

Lemme 4.1. (i) On a $J'(\beta, \Lambda) = P'_\beta(\Lambda)J^1(\beta, \Lambda)$. Son image inverse $\pi^{-1}(J'(\beta, \Lambda))$ dans $\text{Spin}_F(V)$ est stable par trialité.

(ii) Soit $\bar{J}(\beta, \Lambda) = (\pi^{-1}(J'(\beta, \Lambda)))^\Gamma$. On a $\bar{J}(\beta, \Lambda) = \bar{P}_\beta(\Lambda)\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$, en particulier : $\bar{J}(\beta, \Lambda)/\bar{J}^1(\beta, \Lambda) \simeq \bar{P}_\beta(\Lambda)/\bar{P}_\beta^1(\Lambda)$.

Démonstration. (i) La décomposition correspondante dans \tilde{G} est connue [18, §3], celle dans G aussi (elle résulte de l'application de [16, §2] comme au paragraphe 3.1), or $J^1(\beta, \Lambda)$ est contenu dans G' .

(ii) Voir la preuve de la Proposition 3.3. ■

Proposition 4.2. Il existe des représentations $\bar{\kappa}$ de $\bar{J}(\beta, \Lambda)$ prolongeant $\bar{\eta}$ et dont la restriction à un pro- p -sous-groupe de Sylow de $\bar{J}(\beta, \Lambda)$ possède le même entrelacement que $\bar{\eta}$. Deux telles représentations diffèrent d'une torsion par un caractère de $\bar{P}_\beta(\Lambda)/\bar{P}_\beta^1(\Lambda)$ trivial sur tous ses sous-groupes unipotents.

Démonstration. Commençons par décrire un pro- p -sous-groupe de Sylow de $\bar{J}(\beta, \Lambda)$. Grâce à (4.1(ii)), il suffit de déterminer un p -sous-groupe de Sylow de $\bar{P}_\beta(\Lambda)/\bar{P}_\beta^1(\Lambda)$.

On reprend la classification des strates semi-simples décrite au début du paragraphe 1.7. Selon les différents cas, on note :

dans le cas (i), $V' = W^+$ et $H = \text{SL}(V')$; dans le cas (iii), $V' = W_\lambda$ et $H = \text{GL}(V')$;

dans le cas (ii), $V' = W$ et $H = \mathrm{SU}(V')$; dans le cas (iv), $V' = W$ et $H = \mathrm{U}(V')$.

Dans chaque cas, $(\Lambda_{V'}, n, 0, \beta_{V'})$ est une strate semi-simple dans l'algèbre de Lie de H et les lemmes 1.6 et 1.7 permettent d'affirmer que la restriction de V à V' induit un isomorphisme de $\bar{P}_\beta(\Lambda)/\bar{P}_\beta^1(\Lambda)$ sur $\tilde{P}_{\beta_{V'}}(\Lambda_{V'}) \cap H/\tilde{P}_{\beta_{V'}}^1(\Lambda_{V'}) \cap H$.

Le corollaire 2.9 de [19] assure l'existence d'une suite de réseaux Λ'^m dans V' normalisée par $F[\beta_{V'}]^\times$, autoduale si H est unitaire, telle que $\tilde{P}_{\beta_{V'}}^1(\Lambda_{V'}^m) \cap H/\tilde{P}_{\beta_{V'}}^1(\Lambda_{V'}) \cap H$ soit un p -sous-groupe de Sylow de $\tilde{P}_{\beta_{V'}}(\Lambda_{V'}) \cap H/\tilde{P}_{\beta_{V'}}^1(\Lambda_{V'}) \cap H$. Quitte à translater ou doubler Λ'^m (cas (i) ou cas (iv)), Λ'^m se prolonge en une suite de réseaux Λ^m dans V correspondant à un point de l'immeuble de \bar{G} et normalisée par $F[\beta]^\times$ (prop. 1.14 à 1.16). Alors :

$$\bar{P}_\beta^1(\Lambda) \subset \bar{P}_\beta^1(\Lambda^m) \subset \bar{P}_\beta(\Lambda^m) \subset \bar{P}_\beta(\Lambda)$$

et $\bar{P}_\beta^1(\Lambda^m)/\bar{P}_\beta^1(\Lambda)$ est un p -sous-groupe de Sylow de $\bar{P}_\beta(\Lambda)/\bar{P}_\beta^1(\Lambda)$. D'après le lemme 1.21, nous pouvons choisir Λ^m pour qu'en outre, $\tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda^m)$ soit inclus dans $\tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda)$. Nous choisissons un tel Λ^m et nous posons $\bar{J}^1(\beta; \Lambda^m, \Lambda) := \bar{P}_\beta^1(\Lambda^m)\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$. C'est un pro- p -sous-groupe de Sylow de $\bar{J}(\beta, \Lambda)$.

Construisons d'abord un prolongement $\bar{\eta}_s$ de $\bar{\eta}$ à $\bar{J}^1(\beta; \Lambda^m, \Lambda)$ qui possède le même entrelacement que $\bar{\eta}$. Etant donné que la strate considérée est autoduale, il convient de "remonter" jusqu'à \tilde{G} afin d'étendre les résultats de la proposition 3.7 de [19].

On reprend les notations 3.1. On pose : $\bar{\theta}_m = \tau_{\Lambda, \Lambda^m, \beta}(\bar{\theta})$. Alors : $\theta_m = \tau_{\Lambda, \Lambda^m, \beta}(\theta)$ et $\tilde{\theta}_m = \tau_{\Lambda, \Lambda^m, \beta}(\tilde{\theta})$. On note $\eta_m, \tilde{\eta}$ et $\tilde{\eta}_m$ les représentations irréductibles de $J^1(\beta, \Lambda^m)$, $\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ et $\bar{J}^1(\beta, \Lambda^m)$ contenant θ_m, θ et $\tilde{\theta}_m$ respectivement.

Comme $\tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda^m) \subset \tilde{\mathfrak{A}}_0(\Lambda)$, la proposition 3.12 de [19] assure l'existence d'une unique représentation irréductible $\tilde{\eta}_s$ du groupe $\bar{J}^1(\beta; \Lambda^m, \Lambda) := \bar{P}_\beta^1(\Lambda^m)\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ prolongeant $\tilde{\eta}$ et dont l'induite à $\bar{P}^1(\Lambda^m)$ est équivalente à l'induite de $\tilde{\eta}_m$ à ce même groupe.

Puisque $\tilde{\theta}$ est τ -invariant, il en va de même de $\tilde{\theta}_m$ (τ commute au transfert), puis de $\tilde{\eta}$ et $\tilde{\eta}_m$ et par suite, de $\tilde{\eta}_s$. On note η_s l'image de $\tilde{\eta}_s$ par la correspondance de Glauberman appliquée à l'action de τ sur $\bar{J}^1(\beta; \Lambda^m, \Lambda)$. C'est une représentation irréductible de $J^1(\beta; \Lambda^m, \Lambda) := \bar{J}^1(\beta; \Lambda^m, \Lambda)^\tau$. En fait, $\bar{P}^1(\Lambda^m) \cap \bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ est un pro- p -groupe avec $p \neq 2$ et $J^1(\beta; \Lambda^m, \Lambda)$ n'est autre que $P^1(\Lambda^m)J^1(\beta, \Lambda)$.

La représentation η_s est un prolongement de η dont l'induite à $P^1(\Lambda^m)$ est équivalente à l'induite de η_m à ce même groupe [17, Theorem 2.2]. Ces propriétés définissent η_s uniquement (même argument que [5, Proposition 5.1.14]).

Comme précédemment, puisque θ et θ_m sont fixes par trialité, η_s est aussi fixe par trialité. On définit $\bar{\eta}_s$ comme l'image de η_s par la correspondance de Glauberman appliquée à l'action de Γ sur $J^1(\beta; \Lambda^m, \Lambda)$. Les mêmes arguments que précédemment ($p \neq 2, 3$) montrent que $\bar{\eta}_s$ est l'unique prolongement de $\bar{\eta}$ à $\bar{J}^1(\beta; \Lambda^m, \Lambda)$ dont l'induite à $\bar{P}^1(\Lambda^m)$ est équivalente à l'induite de $\bar{\eta}_m$ à ce même groupe.

Connaissant l'entrelacement de $\bar{\eta}_m$ (proposition 3.5) et sachant par la démonstration de la proposition 3.3 que pour tout élément g de \bar{G}_β ,

$$\bar{J}^1(\beta, \Lambda)g\bar{J}^1(\beta, \Lambda) \cap \bar{G}_\beta = \bar{P}_\beta^1(\Lambda)g\bar{P}_\beta^1(\Lambda),$$

donc que $\bar{J}^1(\beta; \Lambda^m, \Lambda)g\bar{J}^1(\beta; \Lambda^m, \Lambda) \cap \bar{G}_\beta = \bar{P}_\beta^1(\Lambda^m)g\bar{P}_\beta^1(\Lambda^m)$, l'argument de [5, Proposition 5.1.19] montre que la représentation $\bar{\eta}_s$ est entrelacée par tous les éléments de \bar{G}_β .

Il reste à prolonger $\bar{\eta}_s$ en une représentation de $\bar{J}(\beta, \Lambda)$. En reprenant le raisonnement de [19, Theorem 4.1], il suffit de montrer que tout caractère φ de $\bar{P}_\beta^1(\Lambda^m)/\bar{P}_\beta^1(\Lambda)$ qui est entrelacé par $\bar{P}_\beta(\Lambda)$ se prolonge en un caractère de ce groupe.

Or $\bar{P}_\beta^1(\Lambda^m)/\bar{P}_\beta^1(\Lambda)$ s'identifie à $\bar{P}_{\beta_{V'}}^1(\Lambda'^m)/\bar{P}_{\beta_{V'}}^1(\Lambda_{V'})$ qui, à son tour, s'identifie à un produit de groupes réductifs sur des corps finis de caractéristique différente de 2 et 3. On conclut en suivant la démonstration de [19, Lemma 3.9]. ■

4.2 Représentations supercuspidales

Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$. Si elle est nulle, on note $\bar{\kappa}$ la représentation triviale de $\bar{J}(\beta, \Lambda)$; sinon, on considère un caractère semi-simple $\bar{\theta}$ de $\bar{H}^1(\beta, \Lambda)$, $\bar{\eta}$ son extension de Heisenberg à $\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$ et $\bar{\kappa}$ un prolongement de $\bar{\eta}$ à $\bar{J}(\beta, \Lambda)$ construit au paragraphe précédent.

Soit $\bar{\rho}$ une représentation cuspidale de $\bar{J}(\beta, \Lambda)/\bar{J}^1(\beta, \Lambda) \simeq \bar{P}_\beta(\Lambda)/\bar{P}_\beta^1(\Lambda)$. Notons $\bar{P}_\beta^\circ(\Lambda)$ la composante connexe de $\bar{P}_\beta(\Lambda)$ et $\bar{J}^\circ(\beta, \Lambda) := \bar{P}_\beta^\circ(\Lambda)\bar{J}^1(\beta, \Lambda)$. La restriction de $\bar{\rho}$ à $\bar{P}_\beta^\circ(\Lambda)/\bar{P}_\beta^1(\Lambda)$ contient donc une représentation irréductible cuspidale $\bar{\rho}^\circ$. On note encore $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}^\circ$ les relèvements de $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}^\circ$ à $\bar{J}(\beta, \Lambda)$ et $\bar{J}^\circ(\beta, \Lambda)$ respectivement.

Soit $\bar{\lambda}$ la représentation $\bar{\kappa} \otimes \bar{\rho}$ de $\bar{J}(\beta, \Lambda)$. La paire $(\bar{J}(\beta, \Lambda), \bar{\lambda})$ ainsi obtenue est un *type semi-simple* pour \bar{G} .

Théorème 4.3. *Soit $(\bar{J}(\beta, \Lambda), \bar{\lambda})$ un type semi-simple pour \bar{G} . Si $\bar{P}_\beta^\circ(\Lambda)$ est un sous-groupe parahorique maximal de \bar{G}_β dont le normalisateur dans \bar{G}_β est $\bar{P}_\beta(\Lambda)$ alors la représentation induite $c\text{-Ind}_{\bar{J}(\beta, \Lambda)}^{\bar{G}} \bar{\lambda}$ est une représentation irréductible supercuspidale de \bar{G} .*

Démonstration. Il s'agit de calculer l'entrelacement de $\bar{\kappa} \otimes \bar{\rho}$, calcul analogue à la démonstration de la proposition [19, 6.18]. Si g est un élément de \bar{G} qui entrelace $\bar{\kappa} \otimes \bar{\rho}$, le calcul de l'entrelacement de $\bar{\eta}$ permet de considérer que g appartient à \bar{G}_β et qu'il entrelace la représentation $\bar{\kappa} \otimes \bar{\rho}^\circ$. Puis, l'argument de [5, Proposition 5.3.2] dans lequel on utilise que l'entrelacement de la restriction de $\bar{\kappa}$ à $\bar{J}(\beta; \Lambda^m, \Lambda)$ est égal à celui de $\bar{\eta}$ montre que g entrelace la restriction de $\bar{\rho}^\circ$ à $\bar{J}(\beta; \Lambda^m, \Lambda)$. Alors, de la proposition [19, 1.1] sachant que $\bar{P}_\beta^\circ(\Lambda)$ est un sous-groupe parahorique maximal de \bar{G}_β , on déduit que g appartient au normalisateur dans \bar{G}_β de $\bar{P}_\beta^\circ(\Lambda)$, c'est-à-dire $\bar{P}_\beta(\Lambda)$. Ainsi l'entrelacement de $\bar{\lambda}$ est égal à $\bar{J}(\beta, \Lambda)$. ■

Références

- [1] P. Broussous and B. Lemaire, *Building of $GL(m, D)$ and centralizers*, Transformation Groups **7**(1) (2002), 15–50.
- [2] P. Broussous and S. Stevens, *Buildings of classical groups and centralizers of Lie algebra elements*, J. of Lie Theory **19** (2009), no. 1, 55–78.
- [3] F. Bruhat et J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, 1ère partie : le groupe linéaire général*, Bull. Soc. Math. France **112** (1984), 259–301.
- [4] F. Bruhat et J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, 2ème partie : groupes unitaires*, Bull. Soc. Math. France **115** (1987), 141–195.
- [5] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, *The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups*, Annals of Mathematics Studies 129, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [6] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, *Semi-simple types in $GL(n)$* , Compositio Math. **119** (1) (1999), 53–97.
- [7] J.-F. Dat, *Finitude pour les représentations lisses de groupes p -adiques*, J. Inst. Math. Jussieu **8** (2) (2009), 261–333.
- [8] W. T. Gan and J.-K. Yu, *Schémas en groupes et immeubles des groupes exceptionnels sur un corps local. I. Le groupe G_2* , Bull. Soc. Math. France **131** (3) (2003), 307–358.
- [9] Ju-Lee Kim, *Supercuspidal representations: an exhaustion theorem*, J. Amer. Math. Soc. **20** (2)(2007), 273–320.
- [10] B. Lemaire, *Comparison of lattice filtrations and Moy-Prasad filtrations for classical groups*, J. Lie Theory **19** (1) (2009), 29–54.
- [11] L. Morris, *Tamely ramified supercuspidal representations of classical groups. I. Filtrations*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **24** (6) (1991), 705–738.
- [12] L. Morris, *Level zero \mathbf{G} -types*, Compositio math. **118** (2) (1999), 135–157.
- [13] O. T. O’Meara, *Introduction to quadratic forms*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 117, Springer-Verlag 1963.
- [14] S. Rallis and G. Schiffmann, *Theta correspondence associated to G_2* , Amer. J. Math. **111** (5) (1989), 801–849.

- [15] T. Springer and F. Veldkamp, *Octonions, Jordan algebras and exceptional groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag 2000.
- [16] S. Stevens, *Double coset decompositions and intertwining*, manuscripta math. **106** (2001), 349–364.
- [17] S. Stevens, *Intertwining and supercuspidal types for p -adic classical groups*, Proc. London Math. Soc. **83** (2001), 120–140.
- [18] S. Stevens, *Semisimple characters for p -adic classical groups*, Duke Math. J. **127** (1) (2005), 123–173.
- [19] S. Stevens, *The supercuspidal representations of p -adic classical groups*, Invent. Math. **172** (2) (2008), 289–352.
- [20] J. S. Wilson, *Profinite groups*, London Mathematical Society Monographs New Series, 19, The Clarendon Press, Oxford University Press 1998.
- [21] J.-K. Yu, *Construction of tame supercuspidal representations*, J. Amer. Math. Soc. **14** (3) (2001), 579–622.

Corinne Blondel
C.N.R.S. - Groupes, représentations et géométrie,
Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Paris 7 - Case 7012
F-75205 Paris Cedex 13
France

Laure Blasco
Département de Mathématiques
et U.M.R 8628 du C.N.R.S.
Université Paris-Sud 11, Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex
France

blondel@math.jussieu.fr

laure.blasco@math.u-psud.fr